Faktoriály a kombinační čísla

Anša Lauschmannová

Úmluva. Nechť k, m, n jsou nezáporná celá čísla, $n \geq k$; tedy $k,m,n \in \mathbb{N}_0$.

Definice. (Variace) *k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*

Tvrzení. Počet k-členných variací z n prvků je $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.

Definice. (Permutace) *Permutace řádu n je n-členná variace z n prvků; jinak řečeno, permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$ je libovolné přerovnání prvků $1, \ldots, n$.*

Tvrzení. (Faktoriál) Počet permutací na n-prvkové množině je $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Speciálně $0! = 1$.

Definice. (Kombinace) *k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*

Tvrzení. (Kombinační číslo) Počet možností, jak vybrat k různých prvků z n navzájem různých prvků, je roven kombinačnímu číslu[1] $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tvrzení. (Základní vlastnosti kombinačních čísel)

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{i+1}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} \frac{n+1}{n-k+1}$$

Tvrzení. (Binomická věta) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}$

Příklad 1. (Různé typy zobrazení)

(1) Kolik je zobrazení z n-prvkové do m-prvkové množiny?
(2) Kolik je *prostých* zobrazení z n-prvkové do k-prvkové množiny?
(3) Kolik je prostých zobrazení n-prvkové množiny *na* sebe?
(4) Kolik je zobrazení n-prvkové do k-prvkové množiny, která jsou na?

[1] říkáme mu též binomický koeficient a čteme „n nad ká“

Příklad 2. (Počty podmnožin)

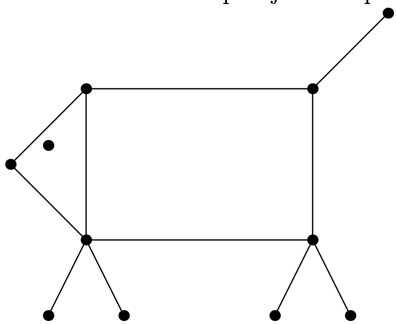
(1) Kolik podmnožin má n-prvková množina?
(2) Kolik je k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny?
(3) Kolik je uspořádaných dvojic (A_1, A_2) disjunktních podmnožin n-prvkové množiny?

Příklad 3. (Sčítání kombinačních čísel)

(1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
(2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
(3) $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$
(4) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m-k}{r} = \binom{m-n}{r-n}$, kde $n \leq r \leq m$
(5) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{j-k} = \binom{m}{j}$, kde $j \leq m$
(6) $\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{m}{n-k} = \binom{2m}{n}$, kde $n \leq m$
(7) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \cdot (n+1) 2^{n-2}$

Příklad 4. (Barvení)

(1) Kolika různými způsoby lze obarvit prase nakreslené na následujícím obrázku, máme-li k dispozici 21 různých barev? Obarvením prasete rozumíme každé obarvení všech puntíků takovým způsobem, že každé dva puntíky, které jsou spojené úsečkou, mají různou barvu. Dvě obarvení považujeme za různá, pokud se liší barvou alespoň jednoho puntíku.



(2) Kolika způsoby lze navléknout na nit 5 červených, 4 modré a 3 žluté korálky tak, aby všechny korálky jedné barvy netvořily souvislý blok?

Příklad 5. (Úlohy matematické olympiády)

(1) Je dáno čtyřmístné číslo v desítkové soustavě. Změnou pořadí jeho číslic lze sestavit právě osm dalších čtyřmístných čísel. Součet nejmenších tří z těchto devíti čísel je 12528. Určete číslice daného čísla.
(2) Adam a Bohouš se zúčastnili turnaje hraného systémem každý s každým jednou, v němž každý hráč měl odehrát denně právě jeden zápas. Adam a

Bohouš však onemocněli a jako jediní nedokončili turnaj. Bohouš odstoupil o pět dní dříve než Adam. Celkem se odehrálo 350 zápasů. Hrál Adam s Bohoušem? Kolik zápasů odehrál?

(3) Dokažte, že každé z čísel $1, 2, \ldots, 2^n$ lze zapsat jednou ze dvou barev (červenou nebo modrou) tak, že žádná nekonstantní $2n$-členná aritmetická posloupnost vybraná z těchto čísel není jednobarevná.

(4) V rovině je dáno 7 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny podmínky:

a) z každé trojice bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,

b) počet úseček je minimální.

Kolik úseček obsahuje útvar, který splňuje tyto podmínky? Nakreslete příklad takového útvaru.

(5) Totéž pro 9 bodů.

(6) Opět máme 7 bodů v rovině a nějaké úsečky. Tentokrát jsou v každé čtveřici bodů alespoň dvě dvojice spojené úsečkou a počet úseček je minimální. Určete počet úseček a nakreslete příklad.

(7) Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 6$ platí $n! \leq (\frac{n}{2})^n$.

(8) Dokažte, že pro každé přirozené k, $m \in \mathbb{N}$ platí $(km)! \geq (k!)^m (m!)^k$.

(9) Pro libovolnou permutaci p množiny $\{1, \ldots, n\}$ označme

$$d(p) = \sum_{k=0}^{n} |p(k) - k|$$

a $i(p)$ počet inverzí permutace p, tedy počet všech dvojic i, j takových, že $1 \leq i < j \leq n$ a $p(i) > p(j)$. Dokažte, že $d(p) \leq 2i(p)$.