Extremálny princíp

Marta Kossaczká

Abstrakt. Príspevok sa zaoberá extremálnym princípom – metódou, ktorá skúma usporiadania a ich extrémne prvky.

Extremálny princíp je jedna z dôkazových metód, ktorá má využitie v rôznych oblastiach matematiky. Základom tejto metódy je nájsť vhodné usporiadanie určitých objektov a zaoberať sa najmenším alebo najväčším prvkom.

Príklad. Na nekonečnej šachovnici je v každom políčku umiestnené prirodzené číslo tak, aby bolo rovné aritmetickému priemeru svojich štyroch susedov. Ukážte, že všetky políčka majú rovnaké číslo.

Riešenie. Najmenšie číslo si označme m a jeho susedné čísla a, b, c, d. Potom platí

$$a + b + c + d = 4m.$$

Všetky čísla sú prirodzené, a teda platí aj $a \geq m$ $b \geq m$ $c \geq m$ $d \geq m$. Zrejme teda $a = b = c = d = m$. Z toho je už jasné, že všetky čísla musia byť m.

Príklad 1. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel.

Príklad 2. V rovine je n bodov takých, že ľubovolné tri tvoria trojuholník s obsahom menším ako 1. Dokažte, že všetky ležia v trojuhoníku s obsahom menším ako 4.

Príklad 3. V rovine máme útvar s obsahom S. Ukážte, že vieme nájsť aspoň $\frac{S}{\pi}$ bodov v našom útvare tak, aby každé dva boli vzdialené aspoň 1.

Príklad 4. Nájdite všetky a, b, c, d celé, pre ktoré platí

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2).$$

Príklad 5. Nájdite všetky x, y, z, w celé, pre ktoré platí

$$8w^4 + 4x^4 + 2y^4 = z^4.$$

Príklad 6. V rovine je n bodov ofarbených na červeno a modro, každá úsečka spojujúca dva body rovnakej farby obsahuje ešte aspoň jeden bod druhej farby. Dokážte, že všetky body ležia na jednej priamke.

Príklad 7. V okolí Pork Townu je n dedín, medzi ktorými vedú jednosmerné vlakové trate, medzi každými dvoma dedinami práve 1. Ukážte, že existuje aspoň jedna dedina, z ktorej sa dá dostať do ľubovolnej inej maximálne cez jednu dalšiu dedinu.

Príklad 8. V rovine je zelených n bodov. Dokážte, že existuje priamka, ktorá prechádza práve dvoma zelenými bodmi.

Príklad 9. Dokážte, že n banditov sa dá rozdeliť na dve skupiny tak, aby každý mal vo svojej skupine maximálne polovicu úhlavných nepriateľov (úhlavné nepriateľstvo je vzájomné).

Príklad 10. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $6n - 1$.

Príklad 11. V rovine je n fialových a n zelených bodov takých, že žiadne tri neležia na jednej priamke. Ukážte, že existuje n úsečiek s rôznofarebnými koncovými vrcholmi tak, že žiadne dve nemajú spoločný bod.

Príklad 12. Do tabulky $n \times n$ sme vpísali čísla $1, 2, \ldots, n^2$, do každého políčka práve jedno. Dokážte, že existujú dve (stranou alebo aj rohom) susediace políčka, ktorých rozdiel je aspoň $n + 1$.

Príklad 13. Máme n kariet, očíslovaných $1, 2, \ldots, n$. Zamiešame ich a potom v každom ťahu otočíme vrchnú kartu. Na nej je číslo k, následne vezmeme vrchných k kariet, obrátime ich poradie, vrátime ich späť a pokračujeme. Dokážte, že raz bude na vrchu 1.

Literatura a zdroje

[1] Engel, A.; *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998
[2] Derksen, H.; *Mathematical Problem Solving*