Extremální princip

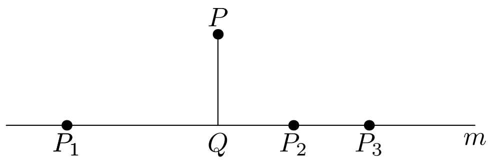
Zuzka Safernová

ABSTRAKT. Extrémální princip je velmi jednoduchá, zato však účinná metoda pro řešení nejrůznějších problémů. Spočívá, jak již název napovídá, ve vyšetřování extrémních případů. Jinak řečeno, vybereme případ, který je nějakým způsobem výjimečný (největší, nejmenší) a ukážeme, že tento případ je řešením celého problému.

Následující příklad je klasickou ukázkou použití:

Motivační příklad. V rovině je dán konečný počet bodů takových, že všechny neleží na jedné přímce. Dokažte, že existuje přímka, která prochází právě přes dva z nich.

Řešení. Nechť P je bod a l přímka. Označme $d(P,l)$ vzdálenost bodu P od přímky l. Nechť S je množina všech kladných vzdáleností $d(P,l)$, kde P probíhá všechny body a l všechny přímky, které procházejí alespoň dvěma zadanými body, ale neprocházejí bodem P. Množina S je neprázdná (všechny body neleží na jedné přímce) a konečná. S má tedy nejmenší prvek, řekněme, že je to $d(P,m)$. Tvrdíme, že přímka m prohází právě dvěma ze zadaných bodů. Pro spor předpokládejme, že m prochází třemi body P_1, P_2 a P_3. Označme Q bod na m, který je nejblíž k P. Alespoň dva z bodů P_1, P_2, P_3 leží na stejné straně vzhledem k Q (jeden z nich může být s Q totožný), řekněme P_2 a P_3 (viz obrázek). Předpokládejme, že body jsou označené tak, že P_2 je blíž k P než P_3. Nechť n označuje přímku procházející body P a P_3. Všimneme si, že $d(P_2,n) < d(P,m)$, což je ve sporu s volbou P a m. Z toho vyplývá, že přímka m prochází jen dvěma zadanými body, čímž je příklad vyřešen.



Příklad 1. Ukažte, že pro nekonečnou množinu bodů toto tvrzení platit nemusí.

Příklad 2. Nechť A je množina $2n$ bodů v rovině, ze kterých žádné tři neleží na přímce. Předpokládejme, že n bodů je obarvených červeně a n modře. Dokažte nebo vyvraťte: Existuje n úseček, ze kterých žádné dvě nemají společný bod a jejichž koncové body jsou vždy dvojice různobarevných bodů z množiny A.

Příklad 3. Na večírku netancoval žádný chlapec s každým děvčetem, ale každé děvče tancovalo aspoň s jedním chlapcem. Dokažte, že existují dva páry CD a

KLÍČOVÁ SLOVA. extrémální, nejmenší, největší

$C'D'$, které spolu tancovaly a přitom C netancoval s D' a C' s D.

Příklad 4. Nechť B a C jsou dvě konečné množiny bílých a černých bodů v rovině takových, že každá úsečka spojující dva body stejné barvy obsahuje navíc bod barvy druhé. Dokažte, že všechny body leží na přímce.

Příklad 5. Dokažte, že není možné najít různá přirozená čísla x, y, z, t tak, aby platilo:

$$x^x + y^y = z^z + t^t.$$

Příklad 6. 3009 čísel $a_1, \dots, a_{3009}$ je napsáno podél kružnice tak, že každé číslo je rovno absolutní hodnotě rozdílu svých dvou následujících sousedů po směru hodinových ručiček (tedy $a_1 = |a_2 - a_3|, a_2 = |a_3 - a_4|, \dots, a_{3009} = |a_1 - a_2|$). Součet všech čísel je 2006. Určete tato čísla.

Příklad 7. V rovině je dáno n bodů takových, že každé tři body tvoří trojúhelník, jehož plocha je menší než 1. Ukažte, že všech n bodů leží v trojúhleníku o obsahu menším než 4.

Příklad 8. Nechť S je taková neprázdná množina celých čísel, že

(1) pokud x i y patří do S, pak i rozdíl $x - y$ patří do S,
(2) všechny násobky libovolného prvku $x \in S$ patří do S.

(a) Dokažte, že existuje takové celé číslo $d \in S$, že S sestává ze všech násobků čísla d.

(b) Ukažte, že část a) lze aplikovat na množinu $\{ma + nb; m, n \in \mathbb{N}\}$ a dokažte, že výsledné d je $nsd(a, b)$.

Příklad 9. Umístěte čísla $1, 2, \dots, n^2$ (bez opakování) v libovolném pořadí do tabulky $n \times n$. Ukažte, že existují dva (svisle, vodorovně, diagonálně) sousední čtverečky, jejichž hodnoty se liší o alespoň $n + 1$.

Příklad 10. Každý člen parlamentu má nejvýše 3 nepřátele mezi zbývajícími členy. Ukažte, že lze členy parlamentu rozdělit na dvě části tak, aby každý měl ve své skupině nejvýše jednoho nepřítele.

Příklad 11. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $6n - 1$.