Extremální princip

ALČA SKÁLOVÁ

ABSTRAKT. Příklady na extremální princip – důkazovou metodu, kterou lze použít v mnoha oblastech matematiky

Extremální princip je důležitá důkazová metoda, která se dá použít v mnoha oblastech matematiky, od teorie čísel po geometrii, od teorie grafů po řešení rovnic. Hlavní myšlenkou je najít v úloze nějaké uspořádání a podívat se na uvažované objekty podle velikosti, vyplatí se často přemýšlet o největších či nejmenších prvcích. Ukažme si to hned na příkladě:

Příklady

Příklad 1. Každý mřížový bod[1] v rovině označíme cedulkou s přirozeným číslem tak, aby platilo, že číslo na cedulce je aritmetickým průměrem čtyř „sousedních" cedulek (té nahoře, dole, vlevo a vpravo). Ukaž, že čísla na cedulkách musejí být všechna stejná.

Řešení. Označme si nejmenší číslo vyskytující se na nějaké cedulce jako m. Čísla na sousedních cedulkách označíme a, b, c, d. Podle zadání je

$$a + b + c + d = 4m \tag{$\heartsuit$}$$

a z volby m jakožto nejmenšího čísla máme $a \geq m$, $b \geq m$, $c \geq m$, $d \geq m$. Pokud by některé z čísel a, b, c, d bylo ostře větší než m, dojdeme ke sporu s ($\heartsuit$), takže $a = b = c = d = m$. Odtud již plyne, že všechna čísla na cedulkách jsou rovna m.

Příklad 2. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Příklad 3. V rovině je dáno n bodů takových, že každé tři body tvoří trojúhelník, jehož plocha je menší než 1. Ukaž, že všech n bodů leží v trojúhelníku o obsahu menším než 4.

KLÍČOVÁ SLOVA. extremální princip, minimální, maximální

[1] Mřížový bod v rovině je bod, který má obě souřadnice celočíselné.

Příklad 4. Nechť B a C jsou dvě konečné množiny bílých a černých bodů v rovině takových, že každá úsečka spojující dva body stejné barvy obsahuje navíc bod barvy druhé. Dokažte, že všechny body leží na přímce.

Příklad 5. V rovině je dáno n přímek ($n > 3$), žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné, navíc průsečíkem každých dvou přímek prochází nějaká třetí přímka. Ukaž, že všechny přímky procházejí jedním bodem.

Příklad 6. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2).$$

Příklad 7. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice

$$8w^4 + 4x^4 + 2y^4 = z^4.$$

Příklad 8. Všechny silnice v Novosibiřské oblasti jsou jednosměrné. Každé dvě osady v oblasti jsou propojeny právě jednou přímou silnicí. Ukaž, že existuje osada, do které se lze z kterékoli jiné osady dostat přímo nebo nejvýš přes jednu jinou osadu.

Příklad 9. Kolem stolu sedí 7 trpaslíků, každý má před sebou pohár a v něm mléko. Mléka mají dohromady 3 litry. První trpaslík rozdělí své mléko rovnoměrně do zbývajících pohárů. Pak postupně, proti směru hodinových ručiček, udělají totéž všichni ostatní. Když sedmý trpaslík skončí, má každý tolik mléka, kolik měl na začátku. Urči, kolik to je.

Příklad 10. Na dvourozměrnou šachovnici $n \times n$ lze umístit n věží tak, že ohrožují všechna pole. Kolik nejméně věží je potřeba pro třírozměrnou šachovnici $n \times n \times n$?

Příklad 11. V rovině je dán konečný počet bodů takových, že všechny neleží na jedné přímce. Dokaž, že existuje přímka, která prochází právě přes dva z nich.

Musí to platit i pro nekonečnou množinu?

Příklad 12. Každý člen parlamentu má nejvýše tři nepřátele[2] mezi zbývajícími členy. Je možné členy parlamentu rozdělit do dvou skupin tak, aby každý měl nejvýše jednoho nepřítele ve své skupině?

Příklad 13. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $6n - 1$.

Příklad 14. Mějme $2n$ bodů v rovině takových, že žádné tři neleží na přímce. Víme, že n z nich jsou farmy a zbývajících n jsou studny. Dokaž nebo vyvrať: Lze postavit n přímých neprotínajících se cest (úseček) tak, že z každé farmy vede cesta k právě jedné studni.

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.

[2] Nepřátelství je symetrické, je-li A nepřítelem B, je i B nepřítelem A.