Extremální princip

Anša Lauschmannová

Extremální princip patří k těm fintám, které lze použít napříč celou matematikou, od teorie čísel po geometrii, od matematické analýzy po aplikované úlohy ve fyzice. Jedná se přitom o velice jednoduchou myšlenku: lze-li v dané úloze najít nějaké uspořádání, tedy způsob, jak seřadit uvažované objekty podle velikosti, vyplatí se často přemýšlet o největších či nejmenších prvcích. Ukažme si to na jednoduchém a známém příkladě:

Největší prvočíslo

Každý z nás jistě ví, že prvočísel je nekonečný počet. Kdyby jich bylo jen konečně mnoho, musí jistě některé z nich být největší. (*Extremální princip!* Využili jsme přirozené uspořádání prvočísel podle velikosti.) Nechť $p_1, p_2, \dots p_n$ jsou všechna prvočísla. Pak číslo $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ je buďto ještě větší prvočíslo, nebo se rozkládá na prvočinitele $N = q_1 \cdots q_k$, z nichž žádný není mezi již uvažovanými prvočísly, a tedy jsou všichni větší než p_n. To je hledaný spor.

Na přednášce si ukážeme některá z rozmanitých využití extremálního principu. Určitě nebudou chybět následující úlohy:

Geometrická úloha

V rovině je dáno n bodů. Každé tři tvoří trojúhelník, jehož obsah je nejvýš 1. Ukažte, že všech n bodů leží uvnitř trojúhelníka, jehož obsah je nejvýš 4.

Aritmetická úloha

Ukažte, že neexistuje čtveřice přirozených čísel x, y, z, u splňující

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2).$$

Grafařská úloha

Všechny silnice v Novosibiřské oblasti jsou jednosměrné. Každé dvě osady v oblasti jsou propojeny právě jednou přímou silnicí. Ukažte, že existuje osada, do které se lze z kterékoli jiné osady dostat přímo nebo nejvýš přes jednu jinou osadu.

Úloha pro šachisty

Na dvourozměrnou šachovnici $n \times n$ lze umístit n věží tak, že ohrožují všechna pole. Kolik věží je potřeba pro třírozměrnou šachovnici $n \times n \times n$?

Pohádková úloha

Kolem stolu sedí 7 trpaslíků, každý má před sebou pohár mléka. (Prázdný pohár se taky počítá jako pohár mléka.) Celkem mají 3 litry tohoto životodárného nápoje. První trpaslík rozdělí své mléko rovnoměrně do zbývajících pohárů. Pak postupně, proti směru hodinových ručiček, udělají totéž všichni ostatní. Když sedmý trpaslík skončí, má každý tolik mléka, kolik měl na začátku. Určete, kolik to je.