Everze sféry

Miroslav Olšák

Abstrakt. Dostanete sféru (míč) z materiálu, který umí procházet sám sebou a chcete ji obrátit naruby. Zdá se vám to triviální? Zdá se vám, že to nejde? Ani jedno není správný odhad.

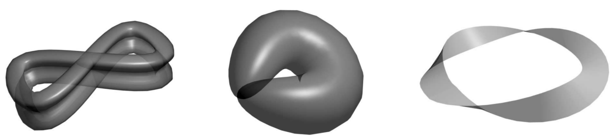
S objekty v našem světě se budeme seznamovat pěkně od nejjednoduššího po nejsložitější.

Materiál

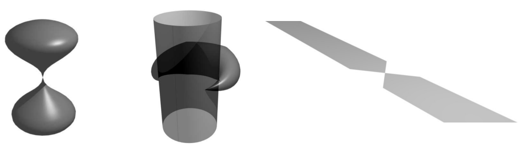
Naše objekty budou převážně z kouzelného materiálu, který:

(i) je dokonale placatý.
(ii) je dokonale pružný a natahovací.
(iii) umí procházet sám sebou.
(iv) nemůžeme neomezeně smrsknout.
(v) nemůžeme neomezeně ohnout.
(vi) nemůžeme dělit, trhat, dělat v něm díry atd.

Například z něho může být vyrobeno:

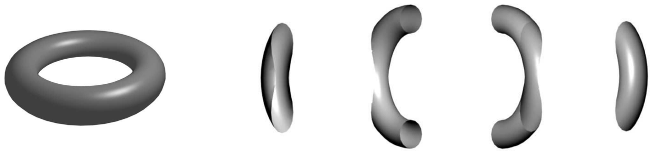


Ale již nikoliv:



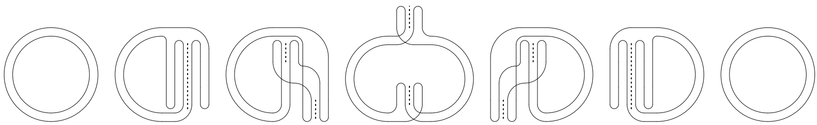
Klíčová slova. algebraická topologie, nepředstavitelnost, sféra, torus, naruby

Torus

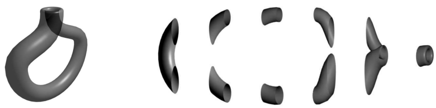


Někomu připomíná pneumatiku, někomu koblihu, vznikne tak, že spojíme levou stranu obdélníka s pravou a horní s dolní.

Torus je možné jednoduše evertovat (převrátit naruby).

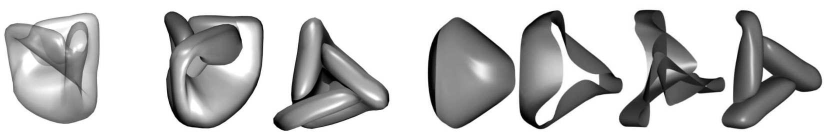


Kleinova láhev



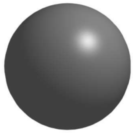
Vcelku jednoduchý objekt, vznikne podobně jako torus s tím rozdílem, že vzniklý válec slepíme zevnitř. Tato plocha je (stejně jako Möbiova páska) neorientovatelná. A že prochází sama sebou? Na to si zvyknete.

Boyova plocha



Tři kopečky nahoře, jeden dole. Reprezentuje reálnou projektivní rovinu. To znamená, že Boyovu plochu dostanete, pokud slepíte kruh tak, že spojíte každý hraniční bod s protějším.

Sféra (povrch koule)

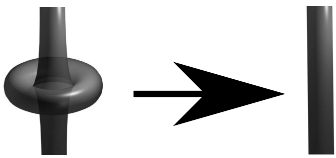


Nevinně vyhlížející plocha: neprochází sama sebou, všechny křivky na ní jdou stáhnout do bodu, je orientovatelná – a v tom je ta potíž.

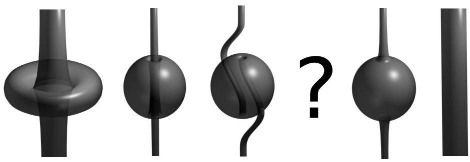
V roce 1958 přišel Stephen Smale s důkazem, že je možné obrátit sféru naruby. Everze podle jeho důkazu ale byla prakticky nezobrazitelná, tedy vědělo se, že to jde, ale již ne jak. Nyní jsou známy postupy, jak everzi provést, ale než se do nich pustíme, podíváme se, proč je převrácení sféry tak složité na představu:

Věta 1. *V rovině není možné převrátit kružnici naruby.*

Odstranění smyčky z válce



Tento problém je ekvivalentní obrácení sféry naruby. Pokud umíme odstranit smyčku z válce, je everze sféry triviální. Obráceně to provedeme tak, že smyčku nafoukneme, čímž vyrobíme sféru, do které vedou zevnitř dvě hadičky. Po převrácení sféry povedou hadičky do sféry zvenčí, takže získáme válec bez smyčky.



Vezmeme si před odstraněním smyčky a po odstranění smyčky jen levý proužek válce. Líbilo by se nám, kdybychom tyto proužky mohli převést na sebe, ale …

Věta 2. *Není možné rozmotat osmičku na nepřekroucený proužek.*

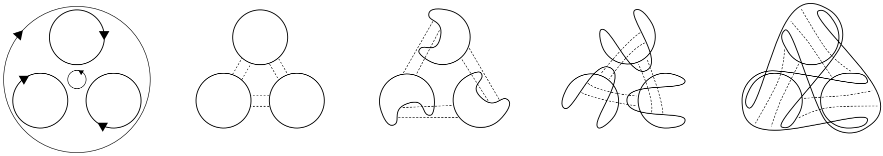
Samozřejmě tato věta možnost everze nevyvrací, jen tvrdí, že se nám při odstraňování smyčky válec překroutí.

A pak je ještě jeden důvod, proč je everze sféry nepředstavitelná.

Věta 3. *V každé everzi sféry existuje okamžik, kdy prochází čtyři roviny jedním bodem.*

Everze přes Boyovu plochu

Namotáme sféru dvakrát na Boyovu plochu. Začneme tedy tak, že si nahoře vyrobíme tři kopečky. A pak s tím začneme kroutit:

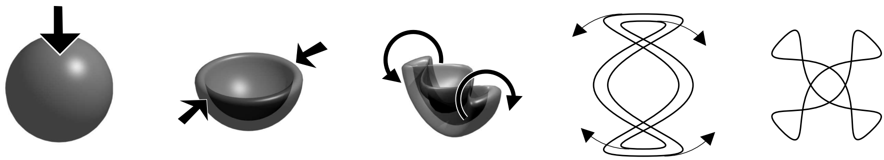


Čárkovaná čára značí sedla mezi jednotlivými kopečky.

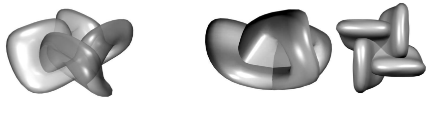
Když to šlo tam, musí to jít i zpátky, rozmotáme a máme sféru naruby.

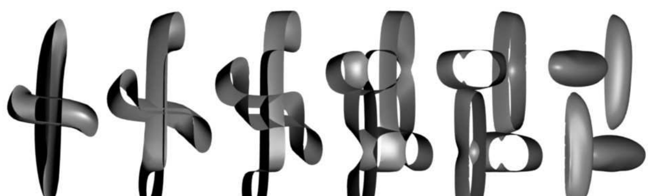
Everze přes Morinovu plochu

Začneme tak, že jižní pól protlačíme dolů (zatím ne skrz sféru), takže dostaneme něco jako povrch misky. Vzápětí tuto misku nahoře protlačíme samu sebou. A teď s tím začneme kroutit.



Když uši otočíme o 90° a spodní části na sebe budou kolmé, získáváme Morinovu plochu.

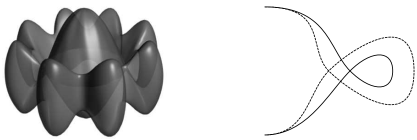




Nyní stačí otočit o 90° a aplikovat zpětný postup.

Everze Thurstonovým zvlněním

Sféru si poledníky rozdělíme na několik (například 8) proužků a každý z nich převrátíme zvlášť. Protlačíme sebou severní a jižní pól. Dále sféru uchopíme v několika polednících a každý druhý poledník zvětšíme.



Když už jsme s oběma póly otočili o 180°, stačí protlačit středem sféry ještě prostřední části proužků a everze je dokončena.

Odkazy a zdroje

[1] Video *Outside In* (Thurstonovo zvlnění), *http://video.google.com/videoplay?docid=-6626464599825291409#*
[2] Software zobrazující *The Optiverse*, podobné Morinově everzi, *http://new.math.uiuc.edu/optiverse/*
[3] Software zobrazující Thurstonovo zvlnění, *http://www.dgp.utoronto.ca/˜mjmcguff/eversion/*
[4] *A History of Sphere Eversions*, *http://torus.math.uiuc.edu/jms/Papers/isama/color/opt1.htm*
[6] *Wikipedia: Smale's paradox*, *http://en.wikipedia.org/wiki/Smale's_paradox*