Seriál — Elementy numerické matematiky I.

Numerické řešení nelineárních rovnic

Cílem letošního seriálu je seznámit Tě s odvětvím matematiky, které se nazývá numerická matematika. Nebudeme zde budovat žádné velké matematické teorie, spíše se budeme snažit osvětlit si vše na příkladech.

Začneme drobnou poznámkou k četbě následujícího textu. Dnes se budeme zabývat řešením tzv. nelineárních rovnic. Začínáme fyzikálním příkladem, který motivuje další povídání a ukazuje, že naše zkoumání není samoúčelné. Pokud nemáš fyziku v lásce,[1] můžeš tento příklad bez obav přeskočit a přejít přímo k matematické formulaci úlohy. Na porozumění dalšího textu to nemá vliv.

kadinka.0 **Fyzikální motivace:** Budeme řešit úlohu naznačenou na obrázku. Nádoba válcového tvaru o poloměru $r = 0{,}400m$ a výšce $h = 2r$ byla naplněna vodou do výšky $\frac{h}{2} = r$. Laserový paprsek vycházející z bodu A na horním okraji nádoby má dopadnout do protějšího bodu B na okraji dna. Do kterého bodu X na hladině vody jej musíme namířit? (Absolutní index lomu vody pro světlo He-Ne laseru je $n_2 = 1,331$, absolutní index lomu pro vzduch bereme jako $n_1 = 1$.))

Průchod světla vodní hladinou v bodě X proběhne podle zákonu lomu: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n$. Zvolme souřadnicovou soustavu tak, aby svislá osa y procházela bodem A a vodorovná osa x bodem B. Vodorovná souřadnice bodu X musí splňovat rovnici
$\sin^2\alpha = n^2\sin^2\beta$, $\frac{x^2}{r^2+x^2} = \frac{n^2(2r-x)^2}{r^2+(2r-x)^2}$. Po úpravě a substituci $z = \frac{x}{r}$ dostaneme rovnici čtvrtého stupně

$$(n^2-1)z^4 - 4(n^2-1)z^3 + 5(n^2-1)z^2 - 4n^2z + 4n^2 = 0,$$

když do této rovnice dosadíme za $n = 1,331$ dostaneme

$$f(z) = 0,771561z^4 - 3,086244z^3 + 3,857805z^2 - 7,086244z + 7,086244 = 0.$$

Abychom tedy vyřešili naši úlohu, musíme najít řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně. U takové rovnice již nemá valného smyslu pokoušet se ji řešit přesně. Budeme se snažit nalézt její řešení přibližně, stačí nám ji totiž vyřešit s přesností, s jakou máme zadána fyzikální data. Přesnější řešení by nám stejně k ničemu nebyla.

Matematická formulace problému: Budeme hledat reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$, kde x je reálná proměnná a $f(x)$ je v nějakém smyslu rozumná funkce. Pod funkcí f si můžeš konkrétně představit například polynom čtvrtého stupně $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, který nám dala fyzikální motivace. Jiným příkladem funkce f může být pro rovnici $x = \sin(x) + 1$ předpis $f(x) = \sin x + 1 - x$.

Poznámka: V nadpisu tohoto odstavečku hovoříme o řešení nelineárních rovnic. Rovnice lineární uvažujeme zvlášť. Řešení soustav lineárních rovnic je již jinou (na našem povídání nezávislou) kapitolou numerické matematiky, proto je nezahrnujeme.

Jednobodové iterační metody: Pod názvem „iterační metody“ se skrývají metody, při kterých konstruujeme postupně posloupnost čísel $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$, které aproximují přesné řešení naší

[1] nebo pokud je fyzika zde uvedená na Tebe moc těžká

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

rovnice $f(x) = 0$. Přitom máme zadán předpis jak s pomocí x_i spočítat x_{i+1}, tj. předpis tvaru

$$x_{i+1} = F(x_i).$$

Postupujeme tak, že nejprve zvolíme x_0 počáteční odhad kořene a pak s jeho pomocí spočítáme $x_1 = F(x_0)$, následně s pomocí x_1 spočítáme $x_2 = F(x_1)$, $x_3 = F(x_2)$ atd.

Odvození iterační metody: Jednobodových iteračních metod můžeme vymyslet samozřejmě spoustu. Nejnázornější postup je přepsat si rovnici $f(x) = 0$ ekvivalentními úpravami na tvar $x = F(x)$ a pak hledaný předpis iterační metody zvolíme jako $x_{k+1} = F(x_k)$.

Příklad: Ukážeme si heuristické[2] odvození několika metod pro řešení rovnice $x^2 = 7$, což je vlastně hledání druhé odmocniny ze sedmi. Hledáme tedy řešení rovnice $f(x) = x^2 - 7 = 0$. Tuto rovnici si můžeme přepsat do tvaru $x = F(x)$ například tak, že k oběma stranám naší rovnice přičteme číslo x, dostaneme $x = x + x^2 - 7$, což dává vzoreček $x_{k+1} = x_k + x_k^2 - 7$. Obecněji můžeme nejprve $f(x) = 0$ vynásobit nějakou konstantou c a poté přičíst k oběma stranám číslo x, dostaneme $x = x + c(x^2 - 7)$, což dává pro každé c jinou metodu $x_{k+1} = x_k + c(x_k^2 - 7)$. Konečně můžeme postupovat úplně jinak a přepsat si naši rovnici na tvar $x = \frac{1}{2}(x + \frac{7}{x})$, z čehož můžeme získat vzoreček $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{7}{x_k})$.

Jak posuzovat vhodnost metody? Chyba metody: Každá úprava rovnice $f(x) = 0$ na tvar $x = F(x)$ nám dává jinou iterační metodu. V předcházejícím textu jsme viděli, že vzorečků $x_{k+1} = F(x_k)$, pomocí kterých z počátečního odhadu x_0 konstruujeme posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$, lze získat spoustu. Přirozenou otázkou však je, jak přesně prvky posloupnosti $x_0, x_1, x_2, \ldots$ aproximují přesné řešení naší úlohy, které budeme označovat α, tj. $f(\alpha) = 0$. Není totiž vůbec jasné (a také to často není pravda), proč by měly prvky získané posloupnosti být blízko přesného řešení α.

Definujme proto *chybu $i-$té iterace* vztahem $\varepsilon_i = \alpha - x_i$. Je vidět, že čím menší bude chyba, tím bude metoda lepší. Abychom mohli dát našemu povídání přesný rámec, zastavíme se u pojmů limity a derivace.

Pojem limity a derivace: Na tomto místě bychom chtěli osvětlit jeden pomocný pojem pro další vysvětlování. Čtenáři obeznámení s limitami a derivacemi mohou příslušné odstavce přeskočit. Ostatním ukážeme jen to potřebné, pro systematické studium těchto pojmů doporučujeme například středoškolské učebnice.

Limita posloupnosti: Mějme posloupnost $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Řekneme, že číslo A je limitou této posloupnosti a zapisujeme to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, pokud „vzdálenosti $|x_n - A|$ jsou čím dál menší“, přesněji pokud pro každé kladné ε libovolně malé najdeme přirozené číslo n_0 takové, že pro všechny členy naší posloupnosti s indexem větším než n_0, tj. pro členy $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, \ldots$, platí $|x_n - A| < \varepsilon$, tj. jsou blíž k A než je ε. Pomocí kvantifikátorů můžeme definici limity přepsat na tvar: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ znamená totéž, co $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(\forall n > n_0) \quad |x_n - A| < \varepsilon$.

Derivace funkce: Mějme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu (a, b). K této funkci můžeme přiřadit funkci, kterou nazýváme *derivací funkce f* a značíme $f'(x)$.

Na tomto místě není třeba psát, jakým způsobem derivaci definujeme a pro které funkce

[2] Pod slovem „heuristické“ se skrývá označení, že uvedené (intuitivní) odvozování se zakládá více na názornosti a nezodpovídá přirozené otázky (chyba metody, rychlost konvergence, viz dále), které by si matematik kladl.

existuje. Spokojíme se s ujištěním, že existuje pro funkce, které jsme zde zatím měli a lze ji najít v tabulkách.

Máme-li funkci f, její derivaci f', obě definované na nějakém intervalu (a, b), a nějaký bod $c \in (a, b)$, pak je přímka $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ tečnou ke grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$. Nakresli si obrázek.

Derivace polynomu: Derivace základních funkcí, jejich součtů, součinů, ..., můžeš nalézt v tabulkách. Zde si uvedeme jen vzoreček pro derivaci polynomu. Pro

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

je

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1}x^{n-2} + (n-2) \cdot a_{n-2}x^{n-3} + \cdots + 2 \cdot a_2x^1 + a_1.$$

Konvergence metody: Definujeme, že iterační metoda $x_{k+1} = F(x_k)$ je *konvergentní,* pokud $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$, kde α je přesné řešení rovnice $f(x) = 0$.

Tím jsme přesně definovali, kdy metoda konverguje, tj. kdy prvky posloupnosti v jistém smyslu aproximují přesné řešení α. Pro praktické účely se hodí, když o metodě víme nejenom, že konverguje, ale máme odhadnutu i chybu k-té iterace ε_k. K tomu nám může posloužit následující věta.

Věta o konvergenci a odhadu chyby:[3]

Nechť F je funkce definovaná na intervalu (A, B) a nechť má na tomto intervalu i derivaci. Nechť (a, b) je interval obsažený i s krajními body v intervalu (A, B) a nechť v (a, b) platí nerovnost $|f'(x)| \leq q < 1$, kde q je vhodná konstanta. Nechť přesné řešení α rovnice $f(x) = 0$ leží v intervalu (a, b). Zvolme počáteční odhad kořene α jako $x_0 \in (a, b)$ a pomocí vzorečku $x_{k+1} = F(x_k)$ zkonstruujme posloupnost $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots$ Pak platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$, tj. naše metoda je konvergentní. Navíc pro odhad chyby platí

$$|\varepsilon_k| = |x_k - \alpha| \leq q^k |x_0 - \alpha|.$$

Příklad: Ukážeme si aplikaci předcházející věty na vyšetření konvergence a chyby jedné metody pro výpočet druhé odmocniny ze sedmi (viz příklad dříve). Máme tedy $f(x) = x^2 - 7 = 0$ a uvažujme metodu příslušnou funkci $F(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 7)$, tj. metodu $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4}(x_k^2 - 7)$.

Funkce F je polynom, takže je definovaná a má derivaci pro všechna reálná čísla. Interval (A, B) proto můžeme brát jako $(-\infty, +\infty)$. Jelikož platí $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ leží určitě $\sqrt{7}$ v intervalu $(2, 3)$. Za interval (a, b) zkusme proto vzít interval $(2, 3)$. Nyní si zpočítám derivaci funkce F, dle výše uvedeného vzorce pro derivaci polynomu dostáváme: $F'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Na intervalu $(2, 3)$ platí, že $|F'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$. Tj. zvolíme-li $q = \frac{1}{2}$, budeme mít splněny všechny předpoklady věty.

Tudíž pro libovolné $x_0 \in (2, 3)$ budou iterace konvergovat, chyba $k-$té iterace je odhadnuta[4] jako

[3] Tuto větu uvádíme bez důkazu, pokročilejší čtenář si ji může zkusit dokázat sám. Hlavní myšlenkou důkazu je využít větu o střední hodnotě, která říká, za výše užitých předpokladů na funkci F, že pro libovolné body $x, y \in (a, b)$ existuje bod $c \in (x, y)$, takový, že $F(x) - F(y) = F'(c) \cdot (x - y)$.

[4] α je přesné řešení naší rovnice, tj. $\sqrt{7}$.

$$|\varepsilon_k| = |x_k - \sqrt{7}| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^k |x_0 - \sqrt{7}|.$$

Uvědomíme-li si nyní, že počáteční odhad x_0 i $\sqrt{7}$ leží v intervalu $(2,3)$, můžeme výraz $|x_0 - \sqrt{7}|$ odhadnout délkou intervalu $(2,3)$, což je číslo $3-2=1$. Celkem tedy máme pro chybu $k-$té iterace odhad $\varepsilon_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Jak dlouho počítat? Naším cílem je většinou spočítat řešení s jistou přesností. Chceme-li například výsledek s chybou menší než $\frac{1}{1000}$, je dobré vědět, který člen v námi sestrojené posloupnosti $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ již s takovou přesností aproximuje výsledek.

Předcházející příklad nám dává přímo odhad chyby. V takovém případě již máme v podstatě vyhráno. Chceme-li najít takové x_k, aby $|x_k - \sqrt{7}| < \frac{1}{1000}$, pak stačí zjistit, pro která k je odhad chyby $\left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{1}{1000}$. Snadno nahlédneme, že k zaručení poslední nerovnosti nám stačí již $k = 10$. Tj. stačí spočítat 10 iterací a máme jistotu, že náš výsledek má požadovanou přesnost.

Metoda tečen: Na závěr našeho povídání se zmíníme o jedné dobré metodě, která se nazývá metoda tečen. Je dána předpisem $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ a nalezne uplatnění pro takové funkce, které mají ve zkoumaném intervalu nenulovou derivaci. Této metodě se říká metoda tečen (také Newtonova-Raphsonova), neboť její idea je následující: Pro danou $i-$tou iteraci x_i konstruujeme tečnu ke grafu funkce f v bodě $[x_i, f(x_i)]$. Průsečík této tečny s přímkou x označíme jako x_{i+1}. Nakresli si obrázek a zkus si sám odvodit dle popsaného postupu předpis této metody $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Vícebodové iterační metody: Čtenář si zajisté dokáže představit i metody, při kterých $(k+1)-$tou iteraci nepočítáme jen pomocí $k-$té iterace, ale i iterací předcházejících, tj. máme vzoreček typu $x_{k+1} = G(x_k,\ x_{k-1},\ x_{k-2}, \ldots)$, kde G je funkce j proměnných. K jejímu užití musíme zadat j prvních odhadů $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_j$. Můžeme rovněž konstruovat dvě posloupnosti aproximující přesné řešení naší úlohy, jedna bude kořen odhadovat seshora a druhá zespoda. Takovými metodami jsou například metoda sečen a metoda půlení intervalů. Filosofie těchto metod je jednoduchá. V každém kroku máme vždy dva odhady kořene α, dejme tomu čísla x_i a y_i, takové, že naše funkce má v těchto odhadech opačné znaménko. Pak následující iteraci spočítáme u metody půlení intervalů jako střed intervalu (x_i, y_i), u metody sečen jako průsečík přímky procházející body $[x_i, f(x_i)]$, $[y_i, f(y_i)]$ s osou x. Za x_{i+1} a y_{i+1} vezmeme spočítaný bod a ten z bodů x_i, y_i, aby opět funkce f měla v bodech x_{i+1}, y_{i+1} opačné znaménko. Nakresli si obrázek a odvoď příslušné vzorce. Samozřejmě, pokud nastane případ $f(x_i) = 0$ nebo $f(y_i) = 0$, nemusíme dále počítat, neboť jsme kořen právě našli.

Seriál — Elementy numerické matematiky II.

Aproximace funkcí, interpolace

V dnešním povídání se budeme zabývat aproximací funkcí. Jedná se o problém aproximovat danou funkci $f(x)$ pomocí funkcí nějakého speciálního tvaru. Takový problém řeší experimentátoři z mnoha vědních disciplín. Většinou dostanou výsledky v podobném tvaru, jako v následující motivaci.

Obchodní motivace: Ve městě Kocourkov stával hypermarket a jeho vedoucí Libor zpozoroval zajímavý fakt, že denní tržby v obchodě závisejí na venkovní teplotě. Několik dní jev pozoroval a výsledky si zapsal do tabulky:

teplota [ve $^{\circ}$C]	-5	0	5	10	20	25
tržba [v mil. korun]	0.3	0.5	1	2	5	11

Na další den se chtěl pečlivě připravit a tak bedlivě sledoval předpověď počasí, aby mohl odhadnout tržbu. Ve zprávách se však dozvěděl, že má být 15°C, což v tabulce nebylo. Liborek posmutněl, co teď?

Matematická formulace problému: Nechť $f(x)$ je funkce, kterou chceme aproximovat pomocí třídy funkcí[5] $\{g_n(x)\}$, $n = 0, 1, \ldots$ Předpokládejme, že naši funkci $f(x)$ budeme aproximovat jako tzv. lineární kombinaci funkcí $g_n(x)$, tj. ve tvaru

$$f(x) \approx a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_m g_m(x) = g(x), \qquad (*)$$

kde a_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ jsou konstanty. Ústředním bodem problému aproximace je kritérium pro volbu konstant a_i. O tom však až dále.

Funkci f můžeme mít zadánu buď jen v některých bodech $x_1, \ldots, x_p$ (tj. tabulkou jako v motivačním příkladu, body $x_1, \ldots, x_p$ pak nazýváme uzly aproximace), nebo na nějakém intervalu (a, b). Pro jednoduchost se budeme zabývat jen prvním případem, kdy známe funkční hodnoty pouze v konečně mnoha bodech.

Nyní rozlišíme dva typy aproximací:

- *interpolační aproximace*: Konstanty jsou voleny tak, že v bodech x_i, $i = 1, \ldots, p$ souhlasí hodnoty aproximační funkce[6] g s hodnotami funkce f.
- *aproximace metodou nejmenších čtverců neboli aproximace v průměru*: Účelem je minimalizovat součet čtverců rozdílů mezi $f(x)$ a $g(x)$ v bodech x_i, $i = 1, \ldots, p$, tj. chceme minimalizovat výraz:

$$(f(x_1) - g(x_1))^2 + (f(x_2) - g(x_2))^2 + (f(x_3) - g(x_3))^2 + \cdots + (f(x_p) - g(x_p))^2.$$

Poznámka: Situace může být mnohem složitější. Předně, pokud budeme mít funkci f zadanou na nějakém intervalu (a, b) (pak se aproximací snažíme najít její vhodné přiblížení pomocí „jednodušších“ funkcí), je dalším rozšířeným typem aproximace tzv. Čebyševova aproximace. Ta se

[5] $g_n(x)$ jsou většinou nějaké jednoduché, speciální a známé funkce — v našem povídání to budou polynomy.

[6] Tvar funkce g je uveden ve vztahu $(*)$.

snaží o minimalizaci maximální hodnoty chyby $|f(x)-g(x)|$ na intervalu (a,b). Tato myšlenka nás v konečném důsledku vede k tzv. Čebyševovým polynomům. S nimi se mohli naši starší řešitelé seznámit v 8. sérii ročníku 1997/1998. Čebyševův polynom nabývá v absolutní hodnotě nejmenší maximální hodnoty mezi všemi polynomy stejného stupně n a stejného koeficientu u členu x^n.

U metody nejmenších čtverců lze v obecném případě uvažovat každý člen $(f(x_i)-g(x_i))^2$ s jinou váhou. Těmito zobecněními se nebudeme dále zabývat, ve zbytku dnešního povídání se zaměříme na první typ aproximace — interpolaci.

Lagrangeova interpolace: Máme dány funkční hodnoty $f(x_i)$ v tabulkových bodech (uzlech) x_i, $i=1,\dots,p$. Tuto funkci budeme aproximovat funkcí g, která nabývá v tabulkových bodech stejné hodnoty jako funkce f a bude to polynom. Budeme tedy aproximovat funkci f ve tvaru (srovnej s tvarem $(*)$)

$$f(x) \approx f(x_0)g_0(x) + f(x_1)g_1(x) + f(x_2)g_2(x) + \cdots + f(x_p)g_p(x),$$

kde funkce g_i jsou polynomy.

Definujeme chybu aproximace jako funkci $E(x)$ splňující

$$E(x) = f(x) - (f(x_0)g_0(x) + f(x_1)g_1(x) + f(x_2)g_2(x) + \cdots + f(x_p)g_p(x))\,. \qquad (**)$$

Naším cílem bude tedy zařídit, aby

$$E(x_i) = 0, \text{ pro } i = 1,\dots,p,$$

a zároveň bychom ještě chtěli najít vyjádření pro chybu $E(x)$, které nám umožní přibližně určit nebo odhadnout chybu pro hodnoty argumentu $x \neq x_i$, $i=1,\dots,p$, tj. pro hodnoty, pro které bychom chtěli naši interpolaci užívat.

Obecné určení polynomů $g_i(x)$ je snadné. Protože chceme, aby chyba v tabulkových bodech byla nezávisle na funkci $f(x)$ nulová, máme z $(**)$, že $g_i(x_i)=1$, pro $i=1,\dots,p$ a $g_i(x_j)=0$ vždy, když $j \neq i$. Jelikož $g_i(x)$ je polynom, obsahuje činitele

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_p)$$

a protože $g_i(x_i)=1$, můžeme psát

$$g_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_p)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_p)}.$$

Vyšší derivace: V minulém dílu seriálu jsme se zmínili o pojmu derivace funkce. Řekli jsme si, že k dané funkci $h(x)$ lze v případě, že je nějakým způsobem rozumná, přiřadit funkci $h'(x)$, kterou nazveme derivací funkce h. Když teď nalezneme derivaci funkce h', dostaneme funkci $(h')'(x)$, kterou zkráceně značíme $h''(x)$ nebo $h^{(2)}(x)$ a nazýváme druhá derivace funkce h. Derivací druhé derivace dostaneme třetí derivaci, atd. Obecně n-tým derivováním funkce $h(x)$ dostaneme n-tou derivaci funkce h, kterou značíme $h^{(n)}(x)$.

Poznámka k derivacím: v předcházejícím povídání jsme jen chtěli uvést pojem n-té derivace, který se vyskytuje v následující pasáži o chybě Lagrangeovy interpolace. Čtenáře, který by se

chtěl s tímto pojmem seznámit blíže, odkazujeme na jiné texty. Zdůrazněme zde jen, že ne každá funkce musí mít derivaci a pokud má, nemusí být definována na stejné množině jako původní funkce. Druhou derivaci opět nemusí mít každá funkce, která má první derivaci, apod. Pro „pěkné“ funkce lze derivaci nalézt v tabulkách, například pro polynom můžeš zpočítat n-tou derivaci, použiješ-li n-krát vzoreček z minulého dílu seriálu.

Chyba Lagrangeovy interpolace: Vztah pro chybu Lagrangeovy interpolace zde uvedeme bez důkazu[7]: Mějme nějaký bod x, pro který chceme určit velikost chyby $E(x)$. Označme nejmenší interval, který obsahuje x a spolu s ním všechny body $x_1, x_2, \ldots, x_p$, jako interval $\langle c, d\rangle$. Pak existuje takový bod[8] $\xi \in (c, d)$, že pro chybu Lagrangeovy aproximace platí:

$$E(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_p) \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}.$$

Poznámka o užití interpolace: Interpolace nám nemusí sloužit jen k určení hodnot funkce mimo body, kde hodnotu známe (to se hodilo hlavně před nástupem počítačů, kdy byly mnohé funkce dány jen tabulkově a výpočet mimo tyto body byl často nejrychlejší pomocí interpolace), ale je to v podstatě základní pilíř pro odvození mnoha metod v jiných oblastech matematiky[9]. Některé takové aplikace si ještě ukážeme.

Interpolace s ekvidistantními[10] uzly: Nyní se budeme zabývat případem, kdy tabulkové body $x_1, \ldots, x_p$ jsou od sebe vzdáleny vždy o stejnou délku $h > 0$, tj. platí $x_{j+1} - x_j = h$, pro $j = 1, \ldots, p - 1$.

Diference vpřed: Mějme funkci f, bod x z jejího definičního oboru. Definujme $k-$tou diferenci vpřed s krokem h v bodě x funkce f pomocí rekurentního předpisu

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h^{k-1} f(x + h) - \Delta_h^{k-1} f(x),$$

kde za nultou diferenci vpřed bereme přímo funkční hodnotu

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Tedy například

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x + h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h^1 f(x + h) - \Delta_h^1 f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x).$$

Obecně můžeme k-tou diferenci vyjádřit nerekurentně ve tvaru

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh).$$

[7] Čtenář znalý základů matematické analýzy se může o důkaz pokusit sám. Napovíme mu, že se využije tzv. Rollova věta.

[8] Hodnota bodu ξ je však závislá na x. Pro různá x mohou být odpovídající ξ různá.

[9] Pro zdatnější čtenáře poznamenáváme, že se jedná o různé metody numerického derivování, numerické kvadratury, numerického integrování diferenciálních rovnic, ...

[10] Přívlastkem ekvidistantní se vyjadřuje, že tabulkové body jsou od sebe stejně vzdáleny.

Ověření tohoto vztahu ponecháváme do páté úlohy. Jak by čtenáře mohlo napadnout, existují též zpětné diference (a centrální diference), ale o nich se zde již nebudeme zmiňovat. O diferencích zde píšeme proto, že se pomocí nich dají pro ekvidistantní tabulkové hodnoty zapisovat interpolační vzorce. Jako příklad si uvedeme tzv. Newtonův vzorec pro interpolaci vpřed

$$y(x_1 + hm) = f(x_1) + \binom{m}{1}\Delta_h^1 f(x_1) + \binom{m}{2}\Delta_h^2 f(x_1) + \binom{m}{3}\Delta_h^3 f(x_1) + \cdots + \binom{m}{p}\Delta_h^p f(x_1),$$

kde $m \in \mathbb{N}_0$ a symbolem $\binom{m}{j}$ značíme pro $j \leq m$ obvyklé kombinační číslo, pro $j > m$ pokládáme $\binom{m}{j} = 0$. Laskavý čtenář sám nahlédne souvislost tohoto vzorce se vztahem pro Lagrangeovu interpolaci. Pomůckou Ti může být vztah dokazovaný v 5. úloze seriálové série.

Jedna aplikace interpolace, inverzní interpolace: Na závěr si ukážeme jednu aplikaci interpolace na řešení nelineárních rovnic, které jsme vyšetřovali v prvním díle seriálu. Mějme tedy funkci $y = f(x)$, jejíž kořen (nebo kořeny) chceme najít a předpokládejme, že známe její hodnoty v řadě bodů, takže máme

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_p
$y = f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\ldots$	$f(x_p)$

Předpokládejme dále, že $f(x)$ má v intervalu $\langle x_1, x_p\rangle$ inverzní funkci, kterou označíme g, tj. $x = g(y)$. Nalezení hodnoty $g(0)$ je tedy ekvivalentní s nalezením kořene funkce $f(x)$. Abychom hodnotu $g(0)$ přibližně určili, napíšeme si předcházející tabulku ve tvaru

y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\ldots$	$f(x_p)$
$x = g(y)$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_p

Nyní je již postup nasnadě — provedeme interpolaci takto získané funkce g v tabulkových bodech $f(x_1), \ldots, f(x_p)$, kde $x_1, \ldots, x_p$ jsou funkční hodnoty v těchto bodech a dostaneme kýženou aproximaci kořene funkce f, jako aproximaci hodnoty $f(0)$. Uvedený postup si můžeš vyzkoušet při řešení 6. úlohy seriálové série.