Dvojí počítání

Zuzka Safernová

Abstrakt. Dvojí počítání nebo také počítání dvěma způsoby je princip založený na následujícím „zřejmém“ faktu: spočítáme-li prvky množiny dvěma různými způsoby, dostaneme stejný výsledek. Tento princip se dá uplatnit ve více odvětvích matematiky, my se však zaměříme převážně na kombinatoriku.

Následující příklad je klasickou ukázkou použití počítání dvěma způsoby:

Motivační příklad. Předpokládejme, že se na párty potká konečný počet lidí a někteří z nich si na uvítanou potřepou rukama (žádný člověk nevítá sám sebe, stejně tak se žádní dva hosté nevítají vícekrát). Potom počet lidí třesoucích si rukama lišekrát je sudý.

Důkaz. Označme osoby jako $P_1, P_2, \dots, P_n$. Spočítejme dvěma způsoby velikost množiny uspořádaných dvojic (P_i, P_j), kde jedna takováto konkrétní uspořádaná dvojice znamená, že P_i si potřásl rukou s P_j. Nechť x_i značí, kolikrát P_i potřásl rukou a nechť y je celkový počet třesení rukou na párty. Na jednu stranu je počet dvojic (P_i, P_j) roven $\sum_{i=1}^{n} x_i$, protože každá osoba P_i má na výběr x_i možných osob P_j. Na druhou stranu každé potřesení rukou přispěje do počtu dvojic dvakrát, protože ho započítáme jak ve dvojici (P_i, P_j), tak ve dvojici (P_j, P_i). Tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2y$. Je-li součet n čísel sudý, pak i lichých sčítanců muselo být sudě (pokud sečteme liše lichých čísel a k tomu kolik chceme sudých, výsledek bude lichý).

Příklad 1. Graficky odvoďte vztah: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

Příklad 2. Každý člen komise je zároveň členem právě tří podkomisí, přičemž každá podkomise má právě tři členy. Dokažte, že počet členů je roven počtu podkomisí.

Příklad 3. 200 studentů se účastní matematické soutěže, kde se řeší 6 příkladů. Je známo, že každý příklad správně vypočítalo alespoň 120 lidí. Dokažte, že musí existovat dva účastníci takoví, že každý příklad vyřešil aspoň jeden z nich.

Příklad 4. Dokažte:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$

Příklad 5. Dokažte:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Klíčová slova. dvojí počítání, počítání dvěma způsoby

Příklad 6. Dokažte:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Příklad 7. Dokažte:

$$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{n+j}{j}.$$

Příklad 8. Dokažte:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$