Dvě neobvyklé existenční techniky

Rado van Švarc

Abstrakt. Příspěvek popisuje dvě jednoduché, ovšem nepříliš známé techniky využívané (zpravidla) pro důkazy existence.

Diskrétní spojitost

Přes svůj zvláštní, poněkud oxymorický název je diskrétní spojitost velmi jednoduchý a intuitivní přístup. Ilustrujme na příkladu:

Příklad 1. Na rovinné louce se pase 2016 bodových prasátek. Pastevec Rado se doslechl, že se k louce blíží vlk, který chce prasátka sežrat. Samozřejmě chce prasátka zachránit, a proto by kolem nich rád postavil kruhovou ohradu (jiné tvary neuznává). Zároveň by si ovšem rád naklonil Štěstěnu na svoji stranu, proto by chtěl nechat právě 42 prasátek mimo ohrádku, a tím učinit krvavou oběť svému Pánu a Spasiteli Belzebubu. Ukažte, že takovou ohrádku skutečně umí postavit.

Řešení. Nejprve ukážeme, že existuje bod B, na kterém nestojí žádné prasátko a který zároveň nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost. To plyne z toho, že pokud má bod ke dvěma prasátkům stejnou vzdálenost, potom leží na ose úsečky, která je spojuje. Tím máme ale zakázaný jen konečný počet (konkrétně $\binom{2016}{2}$) přímek a konečný počet bodů, což nám určitě nepokryje celou rovinu. Proto bod B s požadovanými vlastnostmi vskutku existuje.

Nyní, když jsme hotovi s technikáliemi, přejdeme na skutečné použití diskrétní spojitosti. Uvažujme kružnici k_1 se středem v B, která neobsahuje žádné prasátko (ta existuje – prostě zvolme poloměr menší, než je vzdálenost B k nejbližšímu prasátku). Postupně ji nafukujme, dokud všechna prasátka neleží uvnitř kružnice. Na začátku se mimo kružnici páslo $2016 > 42$ prasátek, na konci je to $0 < 42$. Protože při nafukování najednou přidáme vždy jen jedno prasátko (protože B nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost), musí jednou určitě nastat taková situace, kdy se právě 42 prasátek nachází mimo ohrádku.

Příklad 2. E.T. k narozeninám dostal krásný kruhový dort a hned se rozhodl půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že E.T.

i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (Podařilo se mu tedy oddělit půlkruhovou část, aniž by musel nakrájené kousky přeuspořádat.)

(MKS 33–5–5)

Příklad 3. Ukažte, že existuje 1000 za sebou jdoucích přirozených čísel, mezi kterými se nachází právě 5 prvočísel. (MKS 30–1–4)

Příklad 4. V (na obě strany nekonečné) řadě stojí iKSaři a chudáci (každý člověk je buď iKSař, nebo chudák). Je známo, že pokud vezmeme libovolný konečný podúsek této řady, bude se v něm počet iKSařů a chudáků lišit maximálně o 1000. Ukažte, že existuje podúsek řady délky 2000, ve kterém je právě 1000 iKSařů.

(ITAMO 2013)

Příklad 5. Nechť n je přirozené číslo větší než jedna. V rovině se pase n bodových kraviček a n bodových oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. *Balanční přímkou* nazveme přímku procházející jednou ovečkou a jednou kravičkou tak, že na každé straně od přímky je stejně oveček jako jako kraviček. Ukažte, že existují alespoň dvě balanční přímky. (USAMO 2005)

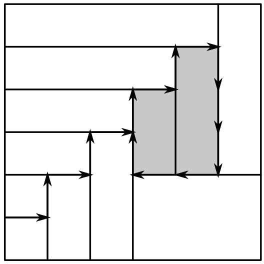
Příklad 6. Nechť S je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. Větrným mlýnem rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka ℓ procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se středem otáčení P, dokud „nenarazí“ na další bod množiny S, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny S, a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod $P \in S$ a přímku ℓ procházející bodem P tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít každý bod z S za střed otáčení nekonečněkrát. (IMO 2011)

Procházení stavového prostoru

Druhá idea této přednášky zní taktéž vcelku krypticky, ovšem neznamená nic jiného, než „když chodíme mezi konečným počtem možností pomocí rozumného pravidla, musíme se buď zacyklit, nebo skončit“. Opět budeme ilustrovat na příkladu:

Příklad 7. Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Předpokládejme, že existuje alespoň jedna hlavní ulice. Dokažte, že město má centrum. (MKS 34–5–6, ISL 2007)

Řešení. Projedeme se po městě. Vjedeme do něj některou hlavní ulicí a dojedeme až na konec této ulice (kde už nejde pokračovat rovně). Tento konec je kvůli vyhlášce uvnitř města, a protože jsou všechny čtvrti obdélníkové, jedná se o křižovatku tvaru T. Díky vyhlášce je alespoň jeden konec ulice, na kterou jsme narazili, opět uvnitř města. Vydáme se tedy na něj. Opět dojedeme na konec a proces opakujeme. Takto projíždíme městem tak dlouho, než dojedeme na místo, na kterém už jsme jednou byli. Mezi okamžikem, kdy jsme na tomto místě byli poprvé, a kdy jsme na něj dojeli podruhé, jsme objeli neprázdnou oblast, v níž je každá čtvrť centrem.



Příklad 8. Na velkém nádvoří jsou na zemi vyznačeny vrcholy čtvercové sítě a na některých z nich stojí židle. Rozhodněte, zda lze na jakoukoliv takovou konfiguraci židlí usadit republikány a demokraty tak, aby na každé židli seděl právě jeden politik, aby se pro každou řadu počet v ní sedících demokratů lišil od počtu v ní sedících republikánů nejvýše o jedna a to samé aby platilo pro všechny sloupce.

(MKS 34–5–7, IMO 1986)

Příklad 9. Mějme libovolné prvočíslo $p \geq 7$. Dokažte, že pak existuje přirozené číslo n a celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ nesoudělná s p taková, že

$$\begin{gathered} x_1^2 + y_1^2 \equiv x_2^2 \pmod{p} \\ x_2^2 + y_2^2 \equiv x_3^2 \pmod{p} \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \equiv x_1^2 \pmod{p}. \end{gathered}$$

(MKS 34–3–8)

Příklad 10. Romeo a Julius jeli na výlet do rumunských hor. Stojí na opačných stranách pohoří ve stejné nadmořské výšce a chtějí se pohybovat tak, že stále budou mít stejnou nadmořskou výšku. Cesta mezi nimi tvoří graf lineární lomené funkce (je to lomená čára). Každý bod cesty je alespoň tak vysoko jako počáteční nadmořská výška Romea a Julia. Dokažte, že se mohou setkat. (MKS 24–1–7)

Zdánlivě neexistenční úlohy

Myšlenka procházení stavových prostorů se vyskytuje i v úlohách, které na první pohled nevypadají příliš „existenčně“. Pomocí stavových prostorů v nich však (často při důkazu sporem) jako pomocné tvrzení ukážeme existenci něčeho, co zadání nepožaduje, ale co nám pomůže vyřešit úlohu.

Příklad 11. Máme n karet očíslovaných 1 až n zamíchaných v balíčku. V každém kroku se podíváme na horní kartu. Pokud na ní je číslo k, obrátíme pořadí horních k

karet. Tj. z pořadí $3, 5, 2, 4, 1, 7, 6$ dostaneme $2, 5, 3, 4, 1, 7, 6$, z toho $5, 2, 3, 4, 1, 7, 6$ a z toho $1, 4, 3, 2, 5, 7, 6$. Ukažte, že časem se nahoru dostane jednička. (TR*i*KS 35)

Příklad 12. David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů. (MKS 34–1–7)

Příklad 13. Bludiště sestává z místností tvaru čtverce spojených jednotkovými zdmi (prostě políčka ve čtverečkované síti). Pokud jsou dvě místnosti spojené zdí, vedou mezi nimi i dveře. PraSátko se snaží dostat ven z labyrintu, do kterého jej uvrhl Děd Vševěd. V každé místnosti je na zemi šipka, která ukazuje na některé dveře. Poté, co Prasátko vstoupí do místnosti, se šipka začne otáčet proti směru hodinových ručiček, a když poprvé ukáže na dveře, zastaví se. Následně se tyto dveře otevřou a do místnosti je vpuštěn jedovatý plyn, takže PraSátko musí dveřmi utéct. Poté, co PraSátko projde, se dveře zavřou a proces se opakuje znovu v nové místnosti. (Jedovatý plyn bude mezitím opět odsátý, takže pokud PraSátko vstoupí do některé místnosti znovu, nic se mu nestane.) Děd vševěd chtěl PraSátku dát šanci, a proto do právě jedné místnosti přidal dveře, které vedou ven (když se otevřou). PraSátko začíná v místnosti, která je nějakou posloupností dveří spojená s místností s východem. Je Děd Vševěd schopný nastavit tvar bludiště, pozici východu, počáteční pozici PraSátka a počáteční orientaci šipek tak, aby se PraSátko nikdy nedostalo ven?

Příklad 14. Do každého políčka tabulky $n \times n$ napíšeme kladné reálné číslo tak, že součet čísel v každém řádku je roven 1 a platí, že kdykoliv vybereme n políček tak, že z každého řádku i sloupce vezmeme právě jedno, je součin čísel těchto políček menší nebo rovný součinu čísel na diagonále. Dokažte, že součet čísel na diagonále je alespoň 1. (*i*KS 4–5, St. Petersburg 2000)