Barevné důkazy

Robert Šámal — 2. máje 2001

Příklady — použití obarvení

Polymina. Ve čtvercové síti vyznačíme k čtverců, které „drží pohromadě“ (po vystřižení z papíru tvoří jeden celek, který nikde nedrží jen za roh). Takovému útvaru říkáme *polymino velikosti* k, pro $k = 2, 3, \ldots$ dostáváme domino, trimino, tetramino, … Nakreslete si všech pět různých tetramin — s trochou fantazie pochopíte, kterému budeme říkat I, L, T, O, S.

1. příklad$^-$ Je možno z pěti tetramin (od každého druhu jednoho) vytvořit obdélník?

2. příklad Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?

3. příklad Lze pokrýt obdélník 10×10 pomocí 25 tetramin I?

4. příklad Obdélníková podlaha je vydlážděna dlaždičkami 2×2 a 1×4. Jednu z nich rozpustilý Pavel rozbil, naštěstí máme v zásobě jednu dlaždičku druhého typu. Můžeme dlaždičky přeuspořádat tak, aby byla podlaha pokryta?

5. příklad$^-$ Šachovnici 8×8 je možno vyplnit dominy $2^4 \cdot 901^2 = 12\,988\,816$ způsoby. Kolika způsoby lze vyplnit šachovnici, z níž jsme vyřízli dva protilehlé rohy?

6. příklad* Z obdélníku $n \times n$ vyřízneme všechny čtyři rohy. Pro která n je možno tento útvar pokrýt tetraminy L?

7. příklad Je možno vyplnit krychli $10 \times 10 \times 10$ pomocí 250 cihel $1 \times 1 \times 4$?

8. příklad* Obdélník $a \times b$ lze pokrýt obdélníky $1 \times n$ právě tehdy, když $n|a$ nebo $n|b$. Kdy jej lze pokrýt obdélníky $m \times n$?

9. příklad* Jeden z rohů obdélníku $(2n+1) \times (2n+1)$ je vyříznut. Pro která n lze pokrýt zbývající čtverce dominy 2×1, z nichž polovina je vodorovně a polovina svisle?

10. příklad* Na jedno z políček čtverce 5×5 napíšeme -1, na ostatních 24 políček $+1$. Jedním tahem můžeme změnit znaménko u všech čísel v nějakém čtverci $a \times a$ (pro $a > 1$); chceme docílit toho, aby na všech políčkách byla $+1$. Kde může na začátku být -1, aby to bylo možné?

11. příklad Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček, které s tím původním sousedí rohem. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je nejmenší možný počet volných políček. (Mimochodem, jaký je průměrný počet, pokud berušky lezou náhodně?)

12. příklad^{-} Uvažme body $A = [0,0]$, $B = [0,1]$, $C = [1,0]$, $D = [1,1]$. Na začátku máme body A, B a C. Bod X obsadíme tak, že vezmeme dva obsazené body a jeden zobrazíme ve středové souměrnosti podle druhého, čímž získáme X. Můžeme takto obsadit bod D?

13. příklad* Na nekonečné čtvercové síti hrajeme solitér: Na začátku máme na $n \times n$ průsečících rozmístěny dámové kameny, v každém tahu můžeme přeskočit libovolným kamenem nějakého jeho souseda (jen vodorovně nebo svisle), toho odstranit a přeskakujícím kamenem dopadnout na políčko za kamenem přeskakovaným (to musí být volné). Pro která n můžeme vyhrát, tj. docílit stavu, kdy zbyde jediný kámen?

14. příklad** Obdélník O je rozdělen na konečně mnoho obdélníků $O_1, \ldots, O_n$. Pokud každý z obdélníků O_i má celočíselnou stranu, tak i obdélník O má celočíselnou stranu. Dokažte!

15. příklad* Výstavní síň má půdorys ve tvaru (ne nutně konvexního) n-úhelníka. Najděte co nejmenší počet hlídačů, kteří každou takovou síň ohlídají (hlídač je bod, který vidí na všechny strany).

16. příklad Čtverec 7×7 je pokryt šestnácti dílky 3×1 a jedním 1×1. Kde všude může být dílek 1×1?

17. příklad Lze do krychle $6 \times 6 \times 6$ umístit 53 cihel velikosti $1 \times 1 \times 4$ („rovnoběžně se stěnami krychle")?

18. příklad* Čtverec 23×23 je vyplněn čtverci 1×1, 2×2 a 3×3. Kolik nejméně čtverců 1×1 potřebujeme?

19. příklad Na krychli vyznačíme vrcholy, středy stěn a stěnové úhlopříčky. Můžeme projít každý z vyznačených bodů právě jednou, smíme-li mezi nimi přecházet jen po vyznačených úhlopříčkách?

20. příklad* Na šachovnici $4 \times n$ neexistuje uzavřená cesta jezdcem, která by procházela každým políčkem právě jednou. Dokažte.

Příklady — zkoumání obarvení ad.

21. příklad* V rovině jsou dány dva body $O \neq A$. Pro každý bod $X \neq O$ v rovině označme $\alpha(X)$ velikost orientovaného úhlu AOX měřeného v radiánech proti směru hodinových ručiček $(0 \leq \alpha(X) < 2\pi)$ a $C(X)$ kružnici se středem O a poloměrem $|OX| + \frac{\alpha(X)}{|OX|}$. Předpokládejme, že každý bod roviny je obarven jednou z konečného počtu barev. Dokažte, že existuje bod X, pro který je $\alpha(X) > 0$, a přitom jeho barva se vyskytuje na kružnici $C(X)$.

22. příklad* Každý bod roviny je obarven červeně nebo modře. Ukažte, že existuje obdélník, jehož všechny vrcholy mají tutéž barvu. Zobecněte.

23. příklad⁻ Každý bod prostoru je obarven červeně nebo modře. Ukažte, že existuje čtverec se stranou délky 1, který má všechny vrcholy modré, nebo alespoň tři vrcholy červené.

24. příklad Body roviny jsou obarveny dvěma barvami. Dokažte, že alespoň jednou z barev jsou obarveny dvojice bodů v libovolné vzdálenosti. Tutéž úlohu řešte v prostoru se třemi barvami.

25. příklad Libovolných n bodů v rovině (kde $n \geq 5$) je možno obarvit dvěma barvami tak, že není možno přímkou oddělit body jedné barvy od bodů barvy druhé. Dokažte.

26. příklad Body roviny jsou obarveny třemi barvami. Dokažte, že nějaká úsečka délky 1 má oba konce obarvené touž barvou.

27. příklad* Vrcholy pravidelného $2n$-úhelníka jsou rozděleny do n dvojic. Dokažte, že je-li $n = 4m + 2$ nebo $n = 4m + 3$, tak některé dvě dvojice určují stejně dlouhé úsečky.

28. příklad* Obdélník 6×6 je vydlážděn dominy 2×1. Dokažte, že má alespoň jednu „čáru zlomu“ (tj. přímku, která dělí čtverec na dvě části, ale neprotíná žádný dílek domina). (Poznámka: obdélník $m \times n$ může být vydlážděn bez čáry zlomu, právě když alespoň jedno z čísel m, n je sudé, obě jsou alespoň pět a nejsou obě rovna šesti.)

29. příklad Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že existuje rovnostranný trojúhelník, jehož všechny vrcholy mají stejnou barvu. Řešte též pro sféru místo roviny.

30. příklad Kolik nejméně políček v obdélníku $m \times n$ je potřeba zabarvit, aby na volná políčka nešlo položit trimino L?

31. příklad Přirozená čísla jsou obarvena černobíle. Součet libovolných dvou různě obarvených bodů je černý, jejich součin bílý. Jaký je součin dvou bílých čísel? Najděte všechna taková obarvení!

Použitá literatura. Většina příkladů je opsána ze skvělé knihy Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer 1998.