

# Dotykové grafy

MARTIN TÖPFER

**ABSTRAKT.** Na přednášce si ukážeme několik tvrzení o tom, jak reprezentovat rovinné nebo vnějškově rovinné grafy pomocí dotýkajících se objektů (každý vrchol je reprezentován jedním objektem a dotyk dvou objektů odpovídá hraně mezi příslušnými vrcholy).

*Dotyková reprezentace grafu  $G$*  je množina objektů v rovině (nebo v prostoru) taková, že každý objekt přísluší jednomu vrcholu grafu. Dva objekty se v této reprezentaci dotýkají právě tehdy, když mezi příslušnými vrcholy vede hrana. U mnohoúhelníků můžeme rozlišovat, jestli za kontakt považujeme *bodový kontakt* nebo zda požadujeme *kontakt hran*.

**Definice.** *Rovinný graf* je graf, který můžeme nakreslit do roviny bez křížení hran.

**Věta.** (Kuratowski) *Rovinné grafy jsou právě ty grafy, které neobsahují podrozdělení  $K_5$  ani  $K_{3,3}$ .*

**Definice.** *Vnějškově rovinný graf* je graf, který můžeme nakreslit do roviny bez křížení hran tak, že všechny vrcholy jsou na vnější hranici.

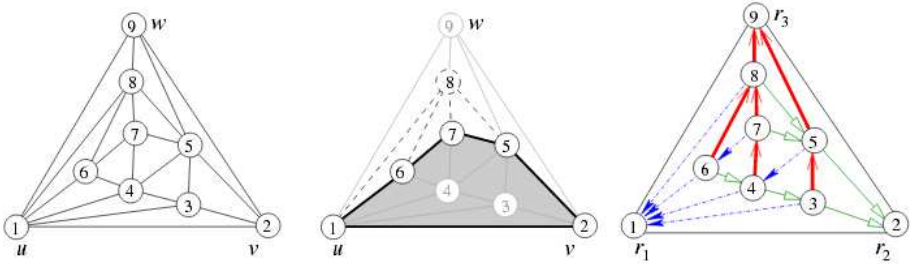
**Věta.** *Vnějškově rovinné grafy jsou právě ty grafy, které neobsahují podrozdělení  $K_4$  ani  $K_{2,3}$ .*

**Věta.** *Vnějškově rovinné grafy mají reprezentaci pomocí hranově se dotýkajících trojúhelníků.*

**Věta.** *Vnějškově rovinné grafy s danými vahami vrcholů mají dotykovou reprezentaci pomocí rozdělení trojúhelníku na čtyřúhelníky takovou, že obsahy čtyřúhelníků odpovídají vahám jednotlivých vrcholů.*

**Úloha.** *Dokažte, že vnějškově rovinné grafy s danými vahami vrcholů mají dotykovou reprezentaci pomocí obdélníků takovou, že velikosti obdélníků odpovídají vahám jednotlivých vrcholů.*

**Definice.** *Maximálně rovinný graf* je rovinný graf, který by přidáním libovolné další hrany přestal být rovinný. Snadno si rozmyslíme, že ekvivalentní definice je, že jde o rovinný graf, který má všechny stěny trojúhelníkové.



**Definice.** Mějme maximálně rovinný graf  $G = (V, E)$  a nějaké jeho nakreslení v rovině. *Kanonické uspořádání* vrcholů  $G$  je uspořádání  $v_1, v_2, \dots, v_n$  takové, že pro všechna  $i$ :

- (1) Podgraf  $G_i$  indukovaný vrcholy  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  je 2-souvislý a na jeho vnější hranici jsou vrcholy  $v_1$  a  $v_2$ .
- (2) Vrchol  $v_i$  má v  $G_i$  alespoň 2 sousedy, všichni jeho sousedi jsou na vnější hraně  $G$  a navíc na této hraně tvoří interval.

**Věta.** Každý maximálně rovinný graf má kanonické uspořádání (a umíme ho rychle zkonstruovat).

**Definice.** Jako *Schnyder realizer* označíme zorientování a obarvení hran třemi barvami tak, že každá barva bude tvořit strom, ve kterém všechny hrany ukazují směrem ke kořeni. Navíc z každého vrcholu musejí vycházet právě tři hrany různých barev a pořadí hran u každého vrcholu musí být po řadě: první barva ven, druhá barva dovnitř, třetí barva ven, první barva dovnitř, druhá barva ven a třetí barva dovnitř.

**Věta.** Každý maximálně rovinný graf má Schnyder realizer.

**Věta.** Každý rovinný graf má bodově dotykovou reprezentaci pomocí trojúhelníků.

**Věta.** Každý rovinný graf má hranově dotykovou reprezentaci pomocí šestiúhelníků.

**Věta.** Každý rovinný graf má stěnově dotykovou reprezentaci pomocí kvádrů v prostoru.

**Věta.** Každý rovinný graf má rovinné nakreslení, ve kterém jsou hrany úsečky a navíc vrcholy jsou v mřížových bodech mřížky  $n \times n$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu.

**Věta.** (Kobe) Každý rovinný graf má dotykovou reprezentaci pomocí kruhů.

## Literatura a zdroje

Založeno na přednášce Stevena Kobourova Geometrické reprezentace grafů II.