Dokonalá čísla

Rado van Švarc

Abstrakt. Tzv. dokonalá čísla, tj. čísla, která jsou rovna součtu svých dělitelů, fascinovala matematiky již od starověku. V příspěvku je uvedeno několik známých tvrzení jak o dokonalých číslech obecně, tak specificky o sudých a lichých dokonalých číslech.

Definice. Jako funkci $\sigma(n)$ budeme značit součet všech dělitelů čísla n včetně n. Například $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 1 + 2 = 3$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Definice. *Dokonalým číslem* nazveme takové číslo n, pro které $\sigma(n) = 2n$. Jinými slovy, dokonalá čísla jsou součty svých dělitelů menších než ona sama. Například 6 je dokonalé číslo, protože šestku dělí 1, 2, 3 a 6, přičemž $6 = 1 + 2 + 3$, nebo též $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

Tvrzení. *Pro dvojici nesoudělných přirozených čísel x a y platí $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Této vlastnosti se říká multiplikativita .*

Tvrzení. *Pro dokonalé číslo n platí*

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2.$$

Důsledek. *Pokud m a n jsou dokonalá čísla, pak $m \nmid n$.*

Sudá dokonalá čísla

Věta. (Eukleides) *Pokud $2^p - 1$ je prvočíslo, pak $2^{p-1}(2^p - 1)$ je dokonalé číslo.*

Věta. (Euler) *Pokud n je sudé dokonalé číslo, tak se dá zapsat jako $2^{p-1}(2^p - 1)$, kde $2^p - 1$ je prvočíslo.*

Úloha. Rado našel sudé dokonalé číslo n větší než 6. Líbilo se mu, jak je zapsané, a tak mu sečetl všechny cifry a jejich součet si označil jako $S(n)$. Poté tuto operaci zopakoval a dostal $S(S(n))$. Ukažte, že po dostatečně dlouhém opakování těchto operací nakonec dostal jedničku.

Věta. (Heathova) *Každé sudé dokonalé číslo větší než 6 se dá zapsat jako součet třetích mocnin několika různých lichých přirozených čísel.*

Intermezzo s úložkami

Úloha 1. Dokonalé číslo $n > 6$ je dělitelné třemi. Ukažte, že $9 \mid n$.
(Rusko 2000)

Úloha 2. Dokonalé číslo $n > 28$ je dělitelné sedmi. Ukažte, že $49 \mid n$.
(Rusko 2000)

Úloha 3. Nechť p je nejmenší prvočíselný dělitel dokonalého čísla $n > 6$. Potom p dělí n v sudé mocnině. (IMC 2014)

A co lichá?

Věta. (Ochem-Rao) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak $n > 10^{1500}$.*

Věta. (Nielsen-Norton) *Pokud n je liché dokonalé číslo, má alespoň 12 různých prvočíselných dělitelů. Pokud není dělitelné třemi ani pěti, má jich alespoň 15. Pokud navíc ani sedmička nedělí n, má n alespoň 27 různých prvočíselných dělitelů.*

Věta. (Ochem-Rao) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak má alespoň 101 prvočíselných dělitelů, kde prvočíselné dělitele počítáme s násobností.*

Věta. (Goto-Iannucci) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak jeho největší prvočíselný dělitel má velikost alespoň 10^7, druhý největší alespoň 10^4 a třetí alespoň 10^2.*

Věta. *Liché dokonalé číslo n lze zapsat jako $q^e \cdot p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \cdots p_k^{2a_k}$, kde q i e dávají zbytek 1 po dělení čtyřmi.*

Věta. (Touchard) *Pokud n je liché dokonalé číslo, pak buď $n \equiv 1 \pmod{12}$, nebo $n \equiv 9 \pmod{36}$.*

Věta. (Nielsen) *Pokud n je liché dokonalé číslo s k různými prvočíselnými děliteli, pak $n < 2^{4^k}$.*