Dláždění a obarvování

Anička Doležalová

Abstrakt. Dláždění je pokrývání určité plochy útvary zadaného tvaru. Na přednášce si ukážeme takové úlohy a podíváme se na to, jak se často dají řešit pomocí vhodného obarvování.

Obarvování je názorný a účinný způsob, jak vyřešit některé kombinatorické úlohy. V principu rozdělíme množinu (typicky čtvercovou síť) na konečný počet podmnožin a pro lepší představu pak jednotlivé části obarvíme různými barvami. V typických úlohách se často objevuje černobílá šachovnice, ale občas je potřeba využít barev více. Řešení problému obarvováním je v podstatě třífázové - nejdříve si musíme uvědomit, že je to obarvovací úloha, dále vymyslet vhodné rozdělení na části a pak už zbývá jen okomentovat, proč něco je, nebo není možné.

Příklad. (motivační známý) Lze pokrýt dominovými kostkami šachovnici 8×8, které jsme uřízli protější dva rohy?

V příkladu jsme použili pojem domino, pro snažší práci si zavedeme ještě několik podobných pojmů. Objektu, který vznikne postupným spojováním čtverců, říkáme polyomino, speciálně polyomino velikosti n, kde n je počet použitých čtverců. Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ používáme pojmy monomino, domino, triomino, tetromino, pentomino. Pro kostky tetromina používáme označení I, L, O, S, T, což připomíná všech 5 typů kostek. Podobně u triomin máme I a L.

Příklad 1. Je možno z pěti tetromin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Příklad 2. Na každém poli šachovnice $n \times n$ sedí beruška. Po zaznění výstřelu se každá přesune na pole, které hranou sousedí s jejím původním místem. Pro která n mohou být znovu obsazená všechna políčka?

Příklad 3. V mřížce vyberme body $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$. V jednom tahu můžeme ve středové souměrnosti zobrazit bod podle jiného už označeného bodu. Můžeme se dostat k poslednímu bodu čtverce $D = (1, 1)$?

Příklad 4. Čtvercový dort o rozměrech 6×6 chceme shora pokrýt kousky čokolády 2×1. Ukažte, že ať plochu vyplníme jakkoli, vždy můžeme dort rozkrojit, aniž bychom krájeli dvojdílek čokolády. Nalezněte takové pokrytí dortu 5×6, že dort rozkrojit bez překrojení čokolády nepůjde.

Příklad 5. Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček sousedících rohem s výchozím. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je nejmenší možný počet volných políček?

Příklad 6. Ukažte, že šachovnici 10×10 nemůžeme vyplnit I-tetrominy.

Příklad 7. Dokažte, že jestliže ze čtverce o velikosti 8×8, který je obarvený jako šachovnice, odebereme libovolné černé a libovolné bílé políčko, potom lze zbývající plochu pokrýt dominy.

Příklad 8. Můžeme pokrýt šachovnici o rozměrech 8×8 patnácti T-tetrominy a jedním O-tetrominem?

Příklad 9. Potřebujeme zabalit 53 kostek $1 \times 1 \times 4$ a máme jen krabici $6 \times 6 \times 6$. Bude nám stačit, nebo musíme koupit větší?

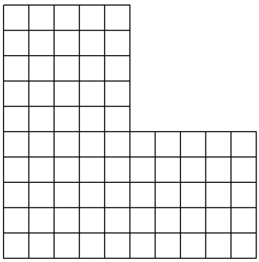
Příklad 10. Uřízli jsme jeden roh šachovnice $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Pro která n můžeme plochu pokrýt dominovými kostkami tak, aby polovina z nich byla umístěna horizontálně?

Příklad 11. Obdélníková podlaha koupelny je pokrytá kachličkami 2×2 a 1×4. Jedna dlaždička se rozbila a od toho druhu už žádné další nejsou. Dokažte, že pomocí druhého typu nejde podlaha opravit, ať kachličky jakkoli přeskládáme.

Příklad 12. Lze pomocí T-tetromin pokrýt čtverec o velikosti 10×10?

Příklad 13. Čtverec o velikosti $2^n \times 2^n$ bez jednoho rohu pokryjte L-triominy.

Příklad 14. Lze pokrýt plochu na obrázku (čtverec 10×10 bez jedné čtvrtiny – pravý horní roh) I-triominy?



Příklad 15. Čtverec o velikosti 7×7 chceme pokrýt pomocí 16 I-triomin a jednoho monomina. Jaká jsou možná umístění daného monomina, aby pokrytí existovalo?

Příklad 16. Mějme šachovnici $4 \times n$, na které někde stojí kůň. Je možné, aby prošel celou šachovnici (tedy každé políčko navštívil právě jednou) a pak se vrátil zpět na počáteční políčko?

Literatura a zdroje

[1] Bára Kociánová: *Obarvování*
[2] Vejtek Musil: *Obarvování a dláždění*
[3] Tereza Dvořáková: *Kombinatorické úlohy o pokrývání*