Diskriminant a Cauchy-Schwarzova nerovnost

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek vychází z kapitoly z knihy [1] věnované stejné dvojici témat. Poskytuje částečný úvod do problematiky algebraických nerovností (pořádným úvodem je pak [3]). Vychází ze základních vlastností kvadratické rovnice, které mimo jiné využívá k důkazu klasické Cauchy-Schwarzovy nerovnosti, jejíž aplikace v závěru uvádí.

Kvadratická (ne)rovnice

Ze školy všichni umíme vyřešit kvadratickou rovnici, ti z lepších rodin i kvadratickou nerovnici. Vychází se při tom ze známého

Tvrzení. *Grafem kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola s vrcholem o souřadnicích $\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right]$. Pro kladné a je vrchol minimem funkčních hodnot, pro záporné je maximem.*

Co byste ale řekli na následující úlohu?

Příklad 1. Dokažte, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Řešení. Je to sice nerovnost dvou proměnných, ale přesto nám znalosti o kvadratické rovnici (jedné proměnné) pomohou. Na nerovnost se podíváme jako na nerovnici s neznámou x a upravíme ji na tvar kvadratické rovnice

$$x^2 + x(-y-1) + y^2 - y + 1 \geq 0.$$

Koeficient kvadratického členu je kladný, takže levá strana je záporná pouze pro hodnoty mezi kořeny. Chtěli bychom tedy dokázat, že (nezávisle na y) má nejvýše jeden (dvojný) kořen (z geometrického hlediska chceme dokázat, že graf naší funkce je celý nad osou x). Diskriminant je roven

$$D = (-y-1)^2 - 4(y^2 - y + 1) = -3(y-1)^2 \leq 0.$$

Nerovnost tedy platí pro všechna x a všechna y.

Uvedený postup nás zbavil jedné proměnné, což je jistě zjednodušení. Vyřešte následující příklady a u třetího z nich si uvědomte, že stačí, aby nerovnost byla kvadratická v jedné proměnné.

Příklad 2. Pro reálná x, y dokažte následující nerovnosti:

(i) $x^2 + y^2 + 4 \geq xy + 2x + 2y$,
(ii) $2x^2 + 2y^2 + 1 > x + y + 2xy$,
(iii) $x^2y^4 + 4x^2 + 1 \geq 4xy$.

Příklad 3. Dokažte, že čísla a, b, c jsou délkami stran trojúhelníka, právě když platí

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right).$$

Příklad 4. Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ nabývá výraz $S = (x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$ své nejmenší hodnoty.

Příklad 5. Pro kladná a, b, c dokažte nerovnost

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Dá se říct, že náš dosavadní postup byl ekvivalentní („parabola je nad osou x právě tehdy, když je jeho diskriminant záporný“), můžeme jej proto obrátit. Uvažme dvě n-tice reálných čísel $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_n$. Výraz

$$F(t) = (x_1t - y_1)^2 + \cdots + (x_nt - y_n)^2$$

je zřejmě nezáporný. Jelikož je zároveň kvadratický v proměnné t, je jeho diskriminant nekladný: $(2x_1y_1 + \cdots + 2x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \leq 0 \Rightarrow$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2.$$

Právě dokázaná nerovnost se nazývá Cauchy-Schwarzova a její využití (resp. její obecnější verze) výrazně přesahuje téma přednášky.

Příklad 6. Dokažte nerovnost $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ pro kladná a, b, c.

Příklad 7. Dokažte také obecnější verzi $(a_1 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ pro $a_i \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 8. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte, že platí $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$.

Příklad 9. Pro x, y, z reálná dokažte $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$.

Příklad 10. Dokažte nerovnost pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnost má dva obzvlášť užitečné tvary, s prvním z nich jsme se už v podstatě setkali u posledního příkladu.

CS zlomkobijec

Tvrzení. (CS zlomkobijec) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \dots a_n$ nezáporná a $b_1, b_2, \dots b_n$ kladná. Pak platí*

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Poznámka. Všimněte si, že jsme podobně jako v nerovnostech „bez sudých mocnin na levé straně“ museli přidat předpoklad o nezápornosti.

Příklad 11. Buďte a, b, c, d kladná čísla splňující $a + b + c + d = 1$. Ukažte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irská MO)

Příklad 12. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte následující nerovnost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbittova nerovnost)

Příklad 13. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

Příklad 14. Nechť a, b, c jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

CS a odmocniny

Tvrzení. *Buď n přirozené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ čísla kladná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

Příklad 15. Dokažte nerovnost $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \leq 12$, pro ta x, pro která má levá strana smysl.

Příklad 16. Dokažte následující nerovnosti pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

(i) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$,

(ii) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$.

Literatura a zdroje

[1] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša: *Metody řešení matematických úloh I*, Masarykova univerzita, 1996.

[2] Alča Skálová: *Cauchy-Schwarzova nerovnost*, Oldřichov, 2012.

[3] M. Rolínek, P. Šalom: *Zdolávání nerovností*, PraSečí seriál, 29. ročník.