Diskrétný kalkulus (alebo ako počítať sumy)

Miško Szabados

Určite ste už všetci počuli o deriváciách a integráloch. Tie dávajú do súvislosti obsah pod grafom funkcie s tým, ako rýchlo funkcia rastie. My si ukážeme analogické vzťahy pre postupnosti a uvidíme, že tým vznikne metóda na rátanie súm.

V príspevku budeme pracovať s postupnosťami $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a niekedy si rozšírime indexy aj na záporné čísla (veď prečo nie).

Diferencie alias rozdiely

Definícia. *Pre postupnosť s definujeme postupnosť Δs tak, že*[15]

$$(\Delta s)_n = s_{n+1} - s_n.$$

Postupnosť Δs budeme nazývať *diferenciou* postupnosti s, alebo jednoducho *rozdielmi* postupnosti s. Predtým, ako si ukážeme, ako sa táto operácia správa na konkrétnych postupnostiach, uvedieme ešte definíciu:

Definícia. *Pre $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme k-tu* klesajúcu mocninu *x ako*

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1),\ x^{\underline{0}} = 1.$$

s_n	n	$n^{\underline{k}}$	2^n	c^n	$\binom{n}{k}$
$(\Delta s)_n$	1	$kn^{\underline{k-1}}$	2^n	$(c-1)c^n$	$\binom{n}{k-1}$

Ďalšie užitočné vzťahy dostaneme pre niektoré operácie s celými postupnosťami s, t. E je operátor posunu definovaný v poznámke dole[15].

s	cs	$s+t$	st
Δs	$c\Delta s$	$\Delta s + \Delta t$	$s\Delta t + Et\Delta s$

Cvičenie 1. Určte diferenciu postupností n^2, $n2^n$, Fibonacciho postupnosti a nejakej vami obľúbenej postupnosti.

Cvičenie 2. Aká je k-ta diferencia postupnosti $n^{\underline{k}}$? A postupnosti n^k?

Cvičenie 3. Roznásobte $(x+y)^{\underline{3}}$ a upravte na tvar obsahujúci iba klesajúce mocniny.

[15] Vo vysokoškolskej reči by sme povedali, že Δ je operátor. Ak navyše definujeme operátor posunu $(Es)_n = s_{n+1}$, môžeme jednoducho písať $\Delta s = Es - s$.

Cvičenie 4. Určte diferenciu postupnosti $1/n$. Viete dodefinovať klesajúcu mocninu pre záporné čísla?

Cvičenie 5. Pomocou viacnásobných diferencií spočítajte $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^n$.

Cvičenie 6. Operátor rozdielu sme mohli definovať aj inak, konkrétne $(\nabla s)_n = s_n - s_{n-1}$. Akú analogickú funkciu by sme potrebovali namiesto klesajúcej mocniny, aby sa diferencovanie správalo pekne?

Sumy

K operátoru diferencie teraz definujeme inverzný operátor a (možno) prekvapivo zistíme, že je to klasická suma. Pozor na to, že budeme používať značenie odlišné od toho klasického.

Definícia. *Pre postupnosť s označme $\sum s$ ľubovoľnú postupnosť S, ktorá spĺňa $\Delta S = s$. Symbolom $\sum_a^b s$ označme číslo $S_b - S_a$.*

Veta. *Číslo $\sum_a^b s$ nezávisí na voľbe postupnosti S z $\sum s$. Navyše platí*

$$(\text{naša}) \sum_a^b s = (\text{klasická}) \sum_{n=a}^{b-1} s_n$$

Pojem našej sumy by bol samoúčelný, ak by preň neexistovali zaujímavé vzťahy. V prvom rade sa správa slušne voči sčítaniu: $\sum_a^b s + \sum_b^c s = \sum_a^c s$. Ďalšie vzťahy dostaneme obrátením vzťahov o diferencii.

s_n	1	$n^{\underline{k}}$	2^n	c^n	$\binom{n}{k}$
$(\sum s)_n$	$n + C$	$\frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} + C$	$2^n + C$	$\frac{c^n}{c-1} + C$	$\binom{n}{k+1} + C$

Posledný vzťah v nasledujúcej tabuľke sa nazýva *sumácia per partes*. Je analogický integrovaniu per partes a odvodzuje sa zo vzorca pre diferenciu súčinu dvoch postupností.

s	cs	$s + t$	$s\Delta t$
$\sum s$	$c \sum s$	$\sum s + \sum t$	$st - \sum Et\Delta s$

Príklad. Vyjadrite $\sum_{n=0}^{k} n2^n$.

Riešenie. Položme $s_n = n$ a $t_n = 2^n$, potom $\Delta s = 1$ a $\Delta t = 2^n$. Použime per partes:

$$\sum s\Delta t = st - \sum Et\Delta s = n2^n - \sum 2^{n+1} = n2^n - 2^{n+1} = (n-2)2^n.$$

Uvedomme si ale, že sme sa dopustili istej nekorektnosti, keďže na ľavej strane máme postupnosť a na pravej číslo. To ale ľahko napravíme tým, že výrazy obsahujúce n stotožníme s príslušnými postupnosťami. Môžeme teda pokračovať:

$$\text{(kl.)} \sum_{n=0}^{k} n2^n = \sum_{0}^{k+1} n2^n = \Big[(n-2)2^n\Big]_0^{k+1} = (k-1)2^{k+1} + 2.$$

Cvičenie 7. Spočítajte $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$.

Cvičenie 8. Vyjadrite n^3 pomocou klesajúcich mocnín a odvoďte vzorec pre $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$.

Cvičenie 9. Spočítajte $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$.

Cvičenie 10. Spočítajte $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \cdots + (2k-5) \cdot (2k-3) \cdot (2k-1)$.

Cvičenie 11. Spočítajte $1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n}$.

Cvičenie 12. Súčet $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ sa nazýva n-té harmonické číslo a má mnoho súvislostí s prirodzeným logaritmom. Vyjadrite $\sum nH_n$.

Literatúra a zdroje

[1] Graham, Knuth, Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.