Diskrétní spojitost

Matěj Doležálek

Abstrakt. Nepříliš vtipný vtip o statisticích praví: „Vydají se tři statistici na lov a narazí na PraSe. První statistik vystřelí, ale mine zleva. Druhý vystřelí, ale mine zprava. ‚Máme ho!‘, prohlásí nadšeně třetí.“ Tento vtip, vzdor profesi svých protagonistů, poměrně věrně popisuje kombinatorickou techniku zvanou *diskrétní spojitost*: když veličina dovede být velká i malá a neumí přeskakovat hodnoty uprostřed, pak je musí taky trefit.

Úloha 0. (motivační) Na rovinné louce se pase 2023 bodových prasátek. Pastevec Rado se doslechl, že se k louce blíží vlk, který chce prasátka sežrat. Samozřejmě chce prasátka zachránit, a proto by kolem nich rád postavil kruhovou ohradu (jiné tvary neuznává). Zároveň by si ovšem rád naklonil Štěstěnu na svoji stranu, proto by chtěl nechat právě 42 prasátek mimo ohrádku, a tím učinit krvavou oběť svému Pánu a Spasiteli Belzebubu. Ukažte, že takovou ohrádku skutečně umí postavit.

Řešení. Nejprve ukážeme, že existuje bod B, na kterém nestojí žádné prasátko a který zároveň nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost. To plyne z toho, že pokud má bod ke dvěma prasátkům stejnou vzdálenost, potom leží na ose úsečky, která je spojuje. Tím máme ale zakázaný jen konečný počet (konkrétně $\binom{2023}{2}$) přímek a konečný počet bodů, což nám určitě nepokryje celou rovinu. Proto bod B s požadovanými vlastnostmi vskutku existuje.

Nyní, když jsme hotovi s technikáliemi, přejdeme na skutečné použití diskrétní spojitosti. Uvažujme kružnici k_1 se středem v B, která neobsahuje žádné prasátko (ta existuje – prostě zvolme poloměr menší, než je vzdálenost B k nejbližšímu prasátku). Postupně ji nafukujme, dokud všechna prasátka neleží uvnitř kružnice. Na začátku se mimo kružnici páslo $2023 > 42$ prasátek, na konci je to $0 < 42$. Protože při nafukování najednou přidáme vždy jen jedno prasátko (protože B nemá k žádným dvěma prasátkům stejnou vzdálenost), musí jednou určitě nastat taková situace, kdy se právě 42 prasátek nachází mimo ohrádku.

Základní úlohy

Úloha 1. Dánsko a Anglie spolu hrály fotbal. Dánský tým dal celkem osm gólů, kdežto anglický pět. Musel během utkání existovat okamžik, kdy se počet gólů, které již Anglie dala, rovnal počtu gólů, které Dánsko ještě dá? (PraSe 37–1j–1)

Úloha 2. E.T. k narozeninám dostal krásný kruhový dort a hned se rozhodl půlkruhovou část z něj věnovat nejlepšímu řešiteli PraSátka. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků tak, že $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že E.T. i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (PraSe 33–1j–5)

Úloha 3. V oboustranně nekonečné řadě stojí pionýři a žampióny. Je známo, že v libovolném úseku několika vedle sebe stojících organismů se počet pionýrů a žampiónů liší nanejvýš o 1000. Dokažte, že v nějakém úseku 2000 organismů stojí přesně 1000 pionýrů a 1000 žampiónů. (Itálie 2013)

Úloha 4. Nekonečná posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňuje, že $a_1 = 1$ a pro libovolné přirozené i je rozdíl $a_{i+1} - a_i$ roven 0 nebo 1. Víte-li, že pro jisté n platí $a_n = \frac{n}{1000}$, dokažte, že existuje m splňující $a_m = \frac{m}{500}$.

Úloha 5. Každá ze stěn osmi jednotkových krychliček je obarvena modře, nebo červeně, přičemž celkově je modrých stěn stejně jako červených. Dokažte, že krychličky lze složit do jedné krychle $2 \times 2 \times 2$, na jejímž povrchu bude modrá barva zabírat stejnou plochu jako červená.

Úloha 6. Ukažte, že existuje 1000 po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž je právě 5 prvočísel. (PraSe 30–1p–4)

Úloha 7. Přirozené číslo n nazveme *budovatelské*, pokud se dá zapsat ve tvaru $n = a^b + b$ pro přirozená čísla $a, b > 1$. Dokažte, že existuje úsek 2014 po sobě jdoucích přirozených čísel s přesně x budovatelskými čísly

(i) pro $x = 2012$, (Srbsko 2014)
(ii) (těžší) pro libovolné $x \in \{0, 1, \dots, 2014\}$.

Úloha 8. Je dána rostoucí posloupnost přirozených čísel $a_0, a_1, \dots$ Dokažte, že existuje právě jedno přirozené $n \geq 1$ splňující

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

(IMO 2014)

Úloha 9. Jsou dána přirozená čísla p, q, n, kde $p + q < n$, a $(n+1)$-tice čísel $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, pro niž platí:

(i) $x_0 = x_n = 0$.
(ii) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $x_i - x_{i-1}$ buďto p, nebo $-q$.

Dokažte, že existují indexy $i < j$ s $(i, j) \neq (0, n)$, pro něž platí $x_i = x_j$.
(IMO 1996)

Záludnější úlohy

Diskrétní spojitost není vždy tím jediným, nebo dokonce ani ne tím hlavním, co úloha potřebuje. Často ji potkáme jako jednu z mnoha ingrediencí, kterou je třeba šikovně kombinovat s něčím dalším – třeba indukcí nebo Dirichletovým principem. Tyto úlohy neřadím nutně podle obtížnosti, spíše podle společných tématek.

Úloha 10. V každém vrcholu pravidelného 2018úhelníku seděl ráno jeden termit. Tito termiti byli v nějakém pořadí označení čísly 1 až 2018 (každé číslo bylo použito). Jediné, co termiti umějí, je vyměnit si místo se svým sousedem. Večer se každý termit nacházel ve vrcholu naproti tomu, v němž začínal. Dokažte, že se někdy v průběhu dne prohodili dva termiti se součtem čísel 2019. (PraSe 38–1p–7)

Úloha 11. (těžší) Máme n červených a n modrých karet, na každé z nichž je nějaké číslo od 1 do n (čísla se mohou opakovat). Je vždy možné vybrat několik modrých a několik červených karet tak, aby měly modrá a červená skupinka stejný součet? (PraSe 40–4j–5b)

Následuje pár úložek s posloupnostmi:

Úloha 12. Uvažme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $a_0 = 0$. Další členy definujme následovně. Pro přirozené číslo n označme ℓ_n největší liché číslo, které dělí n. Pak položme $a_n = a_{n-1} + 1$, pokud ℓ_n dává po dělení čtyřmi zbytek 1, a $a_n = a_{n-1} - 1$, pokud dává zbytek 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje nekonečně mnoho i takových, že $a_i = m$. (PraSe 39–1j–5)

Úloha 13. Nechť $p(n)$ pro přirozené číslo $n > 1$ značí největší prvočíslo, které dělí n. Nekonečná posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňuje $a_1 > 1$ a rekurenci $a_{i+1} = a_i + p(a_i)$. Dokažte, že v posloupnosti $\{a_i\}$ se vyskytuje čtverec. (Čína 2020)

Úloha 14. (těžší) Jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená n je b_n rovno součinu všech různých prvočísel dělících a_n. Dále pro všechna $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dokažte, že existuje přirozené k splňující $\frac{a_k}{b_k} = 2019$. (PraSe 39–2p–7)

Úloha 15. (těžší) Jsou dána nesoudělná přirozená čísla p, q. Na číselné ose stojí klokan, a poněvadž jej baví skákat, skáče si po číselné ose, přičemž se může pohybovat doleva či doprava. Vždy, když skáče doprava, skáče o vzdálenost p, zatímco při poskakování doleva skáče vždy o q. Po jisté době doskáče zpátky tam, kde začal. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $d < p + q$ existují dvě čísla, která klokan navštívil a která jsou od sebe vzdálena přesně d. (iKS–12–C6)

A na závěr něco málo z kombinatorické geometrie:

Úloha 16. V rovině je dáno n modrých a n červených bodů, přičemž žádné tři barevné body neleží na jedné přímce. Dokažte, že lze nakreslit n úseček spojujících modrý a červený bod tak, že žádné dvě nebudou mít společný bod (ani koncový).

Úloha 17. Nechť $n > 1$ je přirozené číslo. V rovině se pase n bodových kraviček a n bodových oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. *Balanční přímkou* nazveme přímku procházející jednou ovečkou a jednou kravičkou tak, že na každé straně od přímky je stejně oveček jako kraviček. Ukažte, že existují alespoň dvě balanční přímky. (USAMO 2005)

Úloha 18. (těžší) Nechť S je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces: Na počátku je vybrána nějaká přímka ℓ procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se středem otáčení P, dokud „nenarazí“ na další bod množiny S, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny S, a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod $P \in S$ a přímku ℓ procházející bodem P tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít každý bod z S za střed otáčení nekonečněkrát. (IMO 2011)

Návody

1. Dívej se na $A - D$ jako funkci času. A a D jsou to, co by tak člověk čekal.

2. Posouvej zvolenou $2k$-tici dílků a sleduj počet menších, které jsou zvolené.

3. Kdyby úloha neplatila, zkonstruuješ dlooouhatánský úsek s větší převahou jednoho organismu, než je povolena.

4. Může $\frac{n}{a_n}$ přeskočit celé číslo?

5. Zprvu slož krychličky libovolně, pak je otáčej, abys dosáhl(a) opačné (ne)rovnováhy modré a červené barvy na povrchu.

6. Na začátku číselné osy je prvočísel hodně. Zkonstruuj úsek, kde je jich fakt málo.

7. Úsek s mnoha budovatelskými čísly sestrojíš explicitně. Pro část (ii) odhadni, kolik budovatelských čísel menších než x může existovat.

8. Co lze říct o posloupnosti $d_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n - na_n$?

9. BÚNO ber $\mathrm{NSD}(p, q) = 1$ a sleduj počty skoků o p v úsecích délky $p + q$.

10. Neprohodivší se doplňkoví termiti museli mít stejnou cestu.

11. Nakresli si tabulku $(n + 1) \times (n + 1)$ a zanes do ní součty částečných součtů modrých a červených karet. Rozparcelováním tabulky na slupky tvaru L kolem jednoho rohu spolu s diskrétní spojitostí a Dirichletem najdi dvě políčka se stejným číslem.

12. Odvoď a_{2n} na základě a_n. Z toho pak nahlédni, že posloupnost neomezeně poroste a nekonečně častokrát se vrátí do 1.

13. Ukaž, že posloupnost $b_n = \frac{a_n}{p(a_n)}$ je neomezená. Pak si můžeš zvolit nějaké šikovné číslo, které by měla trefit.

14. Kdy posloupnost $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ roste? Nahlédni její neomezenost – to pomůže také ukázat, že se vždy vrátí k 1.

15. Pomocí Bézoutových koeficientů urči vhodný počet skoků a kolik $+p$ skoků v něm chceš najít. Technické nesnáze odstraň periodickým nakopírováním skoků. Kdyby nešla aplikovat diskrétní spojitost, posloupnost by utíkala k $\pm\infty$.

16. Snaž se vyřešit jednu libovolnou dvojici bodů. Nejde-li to snadno, rozděl úlohu na dvě menší.

17. Když na konvexním obalu sousedí ovečka a kravička, je to snadné. V těžším případě toč přímkou skrz zvířátko na konvexním obalu.

18. Zvol P, aby byl uprostřed ve směru kolmém na ℓ. Uděl ℓ orientaci a sleduj, kolik bodů je během otáčení nalevo a napravo od ní.

Literatura a zdroje

[1] Rado van Švarc: *Dvě neobvyklé existenční techniky*, Hojsova Stráž, 2016.
[2] *https://artofproblemsolving.com/community*.