Diskrétní pravděpodobnost

Jiří Koula

Definice. *Konečným pravděpodobnostním prostorem nazveme dvojici (Ω, P), kde Ω je konečná množina $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ a P funkce přiřazující každé podmnožině Ω číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, splňující $P(\emptyset) = 0$, $P(\omega) = 1$ a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pro $A \cap B = \emptyset$. Prvky Ω nazýváme elementární jevy a můžeme si je představit jako všechny možné výsledky náhodného pokusu.*

Značení. Zápisem AB budeme rozumět průnik jevů A a B, tedy výraz $A \cap B$. Doplňkový jev k jevu A (tedy množinu $\{\omega; \omega \notin A\}$) označíme A^c.

Tvrzení. Pro pravděpodobnost jevu $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ platí

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(\omega_{i_j}),$$

P je tedy plně určena hodnotami $\mathrm{P}(\omega_1)$, ... , $\mathrm{P}(\omega_n)$.

Poznámka. Je-li $|\Omega| = n$ a $\mathrm{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ pro všechny elementární jevy ω, mluvíme o tzv. klasické pravděpodobnosti. V tomto případě se nám předchozí tvrzení redukuje na $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Tvrzení. (vlastnosti pravděpodobnosti)
(i) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
(iii) $\mathrm{P}(A^c) = 1 - P(A)$

Definice. *Nechť A, B jsou jevy (tedy podmnožiny Ω) a $P(B) > 0$. Potom výraz*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

nazveme podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky B.

Definice. *Jevy B_1, ... , B_n tvoří úplný systém jevů, pokud $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ a $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.*

Věta. (o celkové pravděpodobnosti) *Mějme B_1, ... , B_n úplný systém jevů a A libovolný jev. Pak*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Věta. (Bayesova) *Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty a $P(A) > 0$. Pak pro $1 \leq m \leq n$ platí*

$$P(B_m|A) = \frac{P(A|B_m)P(B_m)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Definice. *Jevy A, B nazveme nezávislé, pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. V opačném případě mluvíme o závislých jevech.*

Věta. *Jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i jevy A, B^c. Je-li $P(B) > 0$, pak $P(A|B) = P(A)$.*

Definice. *Jevy $A_1, \ldots, A_n$ nazveme nezávislé, pokud pro každé $m \leq n$ a každou m-tici $\{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}$ platí $P(B_1 \cdots B_m) = P(B_1) \cdots P(B_m)$.*

Věta.

(i) *Nechť $\mathcal{C}$ je množina nezávislých jevů. Nahradíme-li každý prvek nějaké $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ jeho doplňkem, dostaneme opět množinu nezávislých jevů.*

(ii) *Jsou-li $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$ nezávislé jevy a $P(B_1 \cdots B_m) > 0$, pak*

$$P(A_1 \cdots A_n | B_1 \cdots B_m) = P(A_1 \cdots A_n).$$

Definice. *Náhodná veličina je zobrazení X, které každému prvku $\omega \in \Omega$ přiřadí reálné číslo $X(\omega)$ (např. při hodu kostkou to může být počet padnutých ok).*

Definice. *Střední hodnotou náhodné veličiny X nazveme výraz*

$$\mathsf{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega).$$

Tvrzení.

(i) $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y$

(ii) $\mathsf{E}aX = a\mathsf{E}X$

Definice. *Nechť X je náhodná veličina a B jev. Potom podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny X budeme rozumět výraz*

$$\mathsf{E}(X|B) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega|B).$$

Věta. (o celkové střední hodnotě) *Nechť $B_1, \ldots, B_n$ je úplný systém jevů a X je náhodná veličina. Potom*

$$\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X|B_i)P(B_i).$$

Definice. *Rozptylem náhodné veličiny X rozumíme výraz* $\operatorname{var} X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2$.

Tvrzení. $\operatorname{var} X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$.

Definice. *Řekneme, že náhodná veličina X má nula-jedničkové rozdělení, pokud nabývá pouze hodnot 0 a 1 s pravděpodobnostmi $1-p$ a p, $0 < p < 1$ se nazývá parametr 0-1 rozdělení.*

Definice. *Řekneme, že náhodná veličina X má binomické rozdělení* $\mathrm{Bi}(n,p)$, *pokud nabývá hodnot $0, \dots, n$ a pro $0 \le k \le n$ je $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Toto rozdělení má dva parametry – přirozené n a $0 < p < 1$.*

Definice. *Řekneme, že náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení* $\mathrm{R}(T)$, *kde T je neprázdná konečná množina reálných čísel, pokud $P(X = x) = \frac{1}{|T|}$ pro všechna $x \in T$ a nula jinak.*

Příklady

Příklad 1. Jaká je pravděpodobnost výhry ve 3. pořadí ve sportce (tj. že uhodneme 4 čísla ze 6; nebereme v úvahu prémiové číslo)?

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost, že vám v pokeru přijde full house (tj. že z klasických 32 karet dostanete tři od jedné hodnoty a dvě od druhé)?

Příklad 3. Na losu loterie je deset políček, z nichž šest je prázdných, na dvou je symbol $\mathcal{M}$ a na dvou $\mathcal{Z}$. Vyhráváte v případě, že se vám podaří odkrýt obě $\mathcal{M}$ dříve, než odkryjete nějaké $\mathcal{Z}$. Jaká je vaše pravděpodobnost výhry?

Příklad 4. Asterix a Brutus hrají hru, v níž pravděpodobnost výhry každého z nich je stejná (tedy 50%), jednotlivé hry jsou na sobě nezávislé. Kdo první vyhraje šest partií, stane se vládcem Egypta. Po osmi hrách, z nichž Asterix pět vyhrál, začala válka mezi Římem a Galií, a proto museli hru ukončit. Jak si mají Egypt rozdělit, aby toto dělení bylo spravedlivé?

Příklad 5. Jaká je pravděpodobnost, že se ve třídě s n žáky najdou dva, kteří mají narozeniny ve stejný den?

Příklad 6. Házíme šesti hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padnou vesměs různá čísla? Jaká je pravděpodobnost, že padnou pouze lichá čísla?

Příklad 7. Kolik nejméně čísel je nutno vzít z tabulky náhodných čísel, abychom s pravděpodobností alespoň 0,99 mohli tvrdit, že je mezi nimi alespoň jedno sudé číslo?

Příklad 8. Ve skříni je náhodně rozházeno šest různých párů střevíců. Večer z nich potmě vybereme pět střevíců. Jaká je pravděpodobnost, že z nich můžeme sestavit alespoň jeden správný pár?

Příklad 9. Kontrolor v továrně na fotoaparáty prohlédl 20 přístrojů a zjistil, že tři z nich jsou vadné. Nepozorný zaměstnanec je však zamíchal zpět mezi ostatní, takže jejich pořadí je zcela náhodné. Jaký je nejpravděpodobnější počet fotoaparátů, které bude muset kontrolor prohlédnout, aby tři vadné přístroje opět vyloučil?

Příklad 10. Do vlaku s n vagóny nastoupilo k cestujících ($k \geq n$), kteří si zvolili vagóny náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že žádný vagón není prázdný?

Příklad 11. Z n očíslovaných vstupenek vybereme náhodně k. Jaká je pravděpodobnost, že těchto k vstupenek lze uspořádat v aritmetickou posloupnost?

Příklad 12. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Jestliže navštívil čtyři obchody a doma zjistil, že deštník nemá, jaká je pravděpodobnost, že jej zapomněl ve třetím obchodě?

Příklad 13. Ve vězení jsou tři lotři, Alcapone, Babinský a Cimrman. Losem jsou určeni dva z nich, kteří budou popraveni. Alcapone se chce dovědět, zda je mezi vylosovanými. Ví však, že na přímou otázku mu dozorce neodpoví, proto ho požádá, aby mu pověděl jméno jednoho spoluvězně, který bude popraven. Dozorce mluví pravdu, pokud má více možností, vybere si náhodně. Jmenuje Babinského. Představuje tato informace pro Alcapona nějakou informaci o jeho osudu? (Před odpovědí byla Alcaponova pravděpodobnost, že bude popraven, rovna $\frac{2}{3}$, je podmíněná pravděpodobnost po dozorcově odpovědi jiná?)

Příklad 14. Matěj a Vašek nejsou zdatní počtáři. Pravděpodobnost, že Matěj vyřeší úlohu správně, je $\frac{1}{8}$, pro Vaška je tato pravděpodobnost $\frac{1}{12}$. Pokud počítají oba špatně, potom pravděpodobnost, že dojdou k témuž výsledku, je $\frac{1}{1001}$. Jestliže oba získají stejný výsledek, jaká je pravděpodobnost, že je tento správný?

Příklad 15. V osudí je 8 modrých, 8 červených a 8 bílých koulí. Vytáhneme náhodně jednu kouli, vrátíme ji a opět jednu vytáhneme. Jaká je pravděpodobnost, že obě vytažené koule budou mít tutéž barvu? Jaká je tato pravděpodobnost, pokud vytaženou kouli nevracíme?

Příklad 16. V krabici je 15 tenisových míčků, z toho 9 nových. Pro první hru se náhodně vyberou 3 míčky, po skončení hry se vrátí do krabice. Jaká je pravděpodobnost, že všechny 3 míčky vytažené pro druhou hru budu nové?

Příklad 17. Dny mohou být slunečné nebo zamračené. S pravděpodobnosti p bude zítra stejně jako dnes, s pravděpodobností $1 - p$ ne. Jaká je pravděpodobnost, že za n dní bude stejné počasí jako dnes?

Příklad 18. V žaláři je vězeň odsouzený k smrti. Výstřední žalářník mu však dá šanci. Přinese dvě urny, 12 černých a 12 bílých kuliček. Ty má vězeň rozdělit do uren. Žalářník si poté náhodně jednu vybere a z ní náhodně vytáhne kuličku. Bude-li tato bílá, bude vězeň volný, v opačném případě bude popraven. Jak má vězeň kuličky rozdělit, aby si zajistil největší pravděpodobnost přežití (musí umístit všechny kuličky)?

Příklad 19. Předpokládejme, že rakovinou trpí $0,5\%$ populace. Máme k dispozici test, který má spolehlivost $0,95$ v následujícím smyslu. Má-li osoba rakovinu, je test pozitivní s pravděpodobností $0,95$, nemá-li rakovinu, dostaneme negativní výsledek s toutéž pravděpodobností. Jestliže u náhodně zvolené osoby byl výsledek testu pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že tato osoba rakovinu skutečně má?

Příklad 20. Profesor zkouší snadný, ale nudný předmět. Pokud jste se na zkoušku svědomitě připravovali, dostanete jedničku s pravděpodobností 0,99. Pokud jste se neučili vůbec, jedničku nedostanete s pravděpodobností 0,3 (předmět je opravdu snadný). Na zkoušku se připravuje 40% studentů (předmět je opravdu nudný). Profesor dal studentovi jedničku. Jaká je pravděpodobnost, že se tento student na zkoušku učil?

Příklad 21. Házíme dvěma hracími kostkami. Jev A znamená, že na modré kostce padne liché číslo, jev B, že na zelené kostce padne sudé číslo, jev C, že součet obou čísel je lichý. Jsou tyto jevy nezávislé? Jsou tyto jevy po dvou nezávislé?

Příklad 22. Studentovi je předložen test obsahující 10 otázek, u každé jsou 4 možnosti, z nichž právě jedna je správná. Student je nepřipraven a odpovědi zaškrtává náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví správně alespoň 5 otázek? Jaká je střední hodnota počtu správně zodpovězených otázek?

Příklad 23. Dva hráči košíkové házejí střídavě na koš tak dlouho, dokud není jeden z nich úspěšný. První hráč dá koš s pravděpodobností p_1, druhý s pravděpodobností p_2. Jaká je střední hodnota počtu hodů druhého hráče?

Příklad 24. Jaká je střední hodnota počtu hodů kostkou, než nám padnou tři šestky za sebou?

Příklad 25. V loterii je m_i výher s hodnotou q_i, $i = 1, \ldots, k$. Celkem bude vydáno N losů. Určete cenu losu tak, aby střední hodnota výhry byla rovna polovině ceny.

Příklad 26. Mějme svazek n klíčů, které neumíme rozlišit. Chceme si odemknout byt, zkoušíme proto náhodně klíče, dokud nenajdeme ten správný. Jaká je střední hodnota vyzkoušených klíčů, pokud již odzkoušené do svazku nevracíme? Jaká je tato hodnota v případě, kdy vyzkoušené klíče vracíme zpět do svazku?

Příklad 27. Na vánoční besídku přišlo n dětí a každé přineslo dárek, který dalo do velkého koše. Na konci besídky si každé dítě z koše náhodně vytáhne jeden dárek. Jaká je střední hodnota počtu dětí, které si odnesou vlastní dárek?