Diskrétní geometrie

Martin Tancer

Definice. *Mřížovým bodem nazveme bod v rovině, jehož obě souřadnice jsou celočíselné.*

Věta. (Pickova formule) *Nechť M je mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech. Označme e počet mřížových bodů ležících na jeho hranici a i počet mřížových bodů ležících uvnitř. Potom pro obsah M platí $S = i + \frac{e}{2} - 1$.*

Definice. *Množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní, právě když pro každé dva body $A, B \in K$ už i všechny body úsečky AB leží v K.*

Definice. *Mějme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, konvexním obalem A rozumějme průnik všech konvexních množin, které obsahují A. Značme* $\operatorname{conv} A$.

Věta. (Hellyho věta – rovinná verze) *Nechť $K_1, K_2, \ldots, K_l$ jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^2$, $l \geq 3$. Jestliže průnik každých 3 je neprázdný, potom průnik všech je neprázdný.*

Věta. (Radonovo lemma) *Mějme $n+2$ různých bodů v $\mathbb{R}^n$. Potom tyto body lze rozdělit do dvou disjunktních[1] množin A, B takových, že* $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B \neq \emptyset$.

Věta. (Hellyho věta – vícerozměrná verze) *Nechť $K_1, K_2, \ldots, K_l$ jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^n$, $l \geq n+1$. Jestliže průnik každých $n+1$ je neprázdný, potom průnik všech je neprázdný.*

Věta. (Hellyho věta – nekonečná verze) *Nechť K_α jsou konvexní kompaktní[2] množiny v $\mathbb{R}^n$, kde $\alpha \in I$, I je nekonečná indexová množina. Jestliže průnik každých $n+1$ množin je neprázdný, potom průnik všech je neprázdný.*

Příklad 1. Nechť A je množina bodů v rovině taková, že každé dva mají vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že pak existuje kruh o poloměru $\frac{\sqrt{3}}{3}$ takový, že celá A leží v tomto kruhu.

Příklad 2. Je dáno 5 konvexních množin v rovině takových, že každé 4 mají společný nějaký mřížový bod. Dokažte, že existuje mřížový bod, který je obsažen ve všech pěti množinách.

[1] To jest takových, že jejich průnik je prázdný.

[2] Pokud tento pojem neznáš, stačí Ti vědět, že kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$ je taková množina, která je uzavřená (tj. obsahuje svoji hranici) a omezená.

Příklad 3. Je dáno 9 konvexních množin v 3-rozměrném prostoru takových, že každých 8 má společný nějaký mřížový bod. Dokažte, že existuje mřížový bod, který je obsažen ve všech devíti množinách.

Příklad 4. Nechť je dán mnohoúhelník (uzavřená omezená množina) M, řekneme, že dva body A, B na sebe vidí, právě když celá úsečka AB je v M. Dokažte, že jestliže pro každé tři body z M existuje bod, který na všechny tři vidí, potom existuje bod, který vidí na všechny body z M.