DIRICHLETŮV PRINCIP

David Stanovský

Abstract. Dirichletův princip je velmi jednoduché, avšak středoškolsky značně nedoceněné tvrzení. Práce představuje krátký výklad (vhodný např. jako pasáž do středoškolské učebnice) doplněný sbírkou příkladů, od nejjednodušších až k poměrně obtížným.

1. Úvod

Pod honosným názvem **Dirichletův princip** se skrývá poměrně banální tvrzení:

Pokud do n důlků umístíme n+1 kuliček, tak v některém důlku budou alespoň dvě kuličky.

Pokud do n důlků umístíme kn+1 kuliček, bude v některém důlku více než k kuliček.

Kupodivu lze takové snadné pozorování použít k řešení řady úloh. Počínaje nejjednoduššími (byť leckdy překvapivými) tvrzeními — např. známý problém, zda existují dva Pražané, kteří mají stejný počet vlasů (viz níže), konče rozsáhlou moderní teorií rozkladů (tzv. *Ramseyovou teorií*), která se (zjednodušeně řečeno) zabývá zobecňováním Dirichletova principu. Přitom dochází k řadě značně překvapivých a obtížných výsledků, majících aplikace napříč celou moderní matematikou.

Přesto je však tento princip na střední škole tabu. Neexistuje o něm zmínka v žádné současné učebnici matematiky ani pro střední školy (ať už ve staré, či nové edici), ani pro základní školy. Přitom v kde které knížce hádanek, určených už školním dětem, se jednoduché úlohy na Dirichletův princip vyskytují. Jedinou zmínku lze nalézt v učebnici [1], kde je Dirichletovu principu věnováno asi půl strany.

Přitom je jen málo středoškolsky přístupných témat, kde není potřeba se naučit nezanedbatelné množství pojmů a postupů k řešení zajímavých úloh. Zvlášť v dnešní době, kdy je snaha, aby se studenti učili spíše přemýšlet, než biflovat fakta, by větší pozornost úlohám na Dirichletův princip neškodila. K řešení těchto úloh obvykle stačí (a je nutný) "zdravý selský rozum", nikoliv zavedený, nazpaměť naučený postup. I když jsou řešení často na pár řádek a jsou snadno pochopitelná, jejich nalezení může být extrémně obtížné.

Na závěr poznamenejme, že toto tvrzení nese jméno matematika Dirichleta (1805–1859), který ho jako první výslovně uvedl a použil ve své práci z teorie čísel. Dirichletův princip se v literatuře často uvádí i pod jinými názvy. Zejména v angličtině je vžitý název *pigeon principle*, tj. *princip holubníku* — v jednom oblíbeném znění se hovoří o umísťování $n+1$ holubů do n budek v holubníku.

2. Návod k použití

Dirichletův princip lze použít zejména tehdy, když máme danou nějakou množinu objektů M, a je třeba dokázat existenci objektu(ů) z M s předepsanou vlastností. *Hlavní problém úlohy je poznat, co jsou přihrádky a co kuličky.* Následuje několik jednoduchých aplikací Dirichletova principu.

(1) *Na matfyzu studují dva lidé, kteří mají narozeniny v týž den.*
Důkaz: Rozdělíme matfyzáky (kuličky) do skupin (důlků) podle toho, kdy mají narozeniny. Máme 366 důlků a alespoň 367 kuliček (matfyzáků je více než dva tisíce). Aplikací Dirichletova principu je důkaz hotov.

(2) *V Praze jsou dva lidé, kteří mají na hlavě stejný počet vlasů.*
Důkaz: Každý člověk má totiž na hlavě nejvýše 300 000 vlasů, obyvatel Prahy je více než 1 200 000. Dokonce takto dokážeme, že existuje pět lidí se stejným počtem vlasů.

(3) *Mezi dvanácti celými dvojcifernými čísly najdeme dvě, jejichž rozdíl je dvojciferné číslo s oběma ciframi stejnými.*
Důkaz: Chceme vlastně najít dvě čísla, jejichž rozdíl je dělitelný 11. Rozdělíme tedy našich 12 čísel do 11 přihrádek podle zbytku po dělení 11. Podle Dirichletova principu v některé přihrádce budou dvě čísla, jejich rozdíl je dělitelný 11.

(4) *Pokud jsou a a b nesoudělná, tak desítkový zápis čísla a/b je buď ukončený, nebo periodický s periodou nejvýše $b-1$.*
Důkaz: Uvažme postup pro písemné dělení a/b — v každém kroku získáme nějaký zbytek, což je jedno z čísel $0, 1, \dots, b-1$. Pokud někdy budeme mít zbytek 0, zápis podílu je ukončený. Jinak se mezi zbytky vyskytuje jen $b-1$ různých čísel, tedy (podle Dirichletova principu) mezi b po sobě jdoucími zbytky jsou dva stejné. Označme počet kroků mezi nimi jako k ($k < b$). Protože zbytek jednoznačně určuje další postup dělení, je zápis a/b periodický s periodou k (nebo menší).

(5) *Máme za sebou v nějakém pořadí napsána čísla 1, 2, ..., 101. Dokažte, že můžeme vyškrtnout 90 z nich tak, že zbylých 11 tvoří rostoucí nebo klesající posloupnost.*
Důkaz: Dokážeme rovnou zobecnění: místo 101 uvažujme k^2+1 čísel $x_0, \dots, x_{k^2}$, najdeme rostoucí nebo klesající podposloupnost délky $k+1$. Pro každé i označme a_i délku nejdelší rostoucí podposloupnosti končící x_i a b_i délku nejdelší klesající podposloupnosti číslem x_i začínající. Takto získáme k^2+1 dvojic čísel. Pokud všechny monotónní podposloupnosti mají délku nejvýše k, tak různých dvojic je nejvýše k^2, čili (Dirichletův princip) nějaká dvojice se opakuje, najdu $i < j$, že $a_i = a_j$ a $b_i = b_j$. Pokud je však $x_i < x_j$, tak musí být $a_j \geq a_i + 1$ (rostoucí podposloupnost končící x_i můžeme prodloužit o x_j). Pokud je $x_i > x_j$, tak $b_i \geq b_j + 1$, v obou případech dostáváme spor.

Tím považujeme instruktáž za ukončenou. Následuje sbírka úloh na Dirichletův princip řazená podle obtížnosti do následujících kategorií:

- snadné — úlohy snadno zvládnutelné v běžné výuce
- mírně těžké — těžší úlohy zvládnutelné ve běžné výuce (popř. vhodné do výběrových seminářů)
- těžké — úlohy zvládnutelné (při dostatku času) pro většinu nadprůměrných studentů
- velmi těžké — úlohy obtížné i pro účastníky středoškolských matematických soutěží

I v rámci sekcí byla snaha řadit úlohy od jednodušších k těžším. Úlohy jsou vybrány z [1], matematických olympiád [2] a z několika posledních ročníků matematického korespondenčního semináře. Zařazení úloh do kategorií je spíše orientační. Autor bral v potaz jednak úspěšnost řešitelů semináře, jednok úspěšnost vlastní.

3. Snadné úlohy

3.1 Úloha ([1]). *Dokažte, že v každé skupině 101 přirozených čísel větších než 100 existují aspoň dvě čísla zapsaná týmiž číslicemi na posledních dvou místech dekadického zápisu.*

Řešení. Na posledních dvou místech takových čísel může být 100 různých uspořádaných dvojic číslic, které určují 100 zbytkových tříd při dělení stem. Podle Dirichletova principu, v aspoň jedné zbytkové třídě musí být aspoň dvě z daných 101 čísel. Tato dvě mají stejnou dvojici čísel na konci svého dekadického zápisu. □

3.2 Úloha ([1]). *Dokažte, že v každém čtverci s rozměry 10×10 cm, kde je zakresleno 101 bodů, existuje trojúhelník o obsahu 1 cm^2, který obsahuje aspoň dva z daných bodů*

Řešení. Rozdělíme čtverec na 100 trojúhelníků o obsahu 1 cm^2. Protože vyplní celý čtverec, každý bod do některého z nich padne. Podle Dirichletova principu do aspoň jednoho z trojúhelníků padnou aspoň dva zakreslené body. □

3.3 Úloha (MKS 94/95). *Dokažte, že v každém čtverci s rozměry 6×6 cm, kde je zakresleno 37 bodů, existuje čtverec 2×2 cm, který obsahuje aspoň pět z daných bodů*

Řešení. Rozdělíme čtverec na 9 čtverečků 2×2 cm. Protože vyplní celý čtverec, každý bod do některého z nich padne. Celkem tedy 37 bodů padne do 9 čtverečků, čili podle Dirichletova principu do aspoň jednoho z nic padne aspoň pět zakreslených bodů. □

Úloh založených na téže myšlence jako ty právě uvedené, resp. jako úlohy uvedené v kapitole 2, je možno vymyslet velké množství drobnou češtinářskou a numerickou modifikací zadání. Domníváme se, že po jejich důkladném procvičení by měly být bez výraznějších problémů řešitelné i níže uvedené úlohy, které by se na první pohled mohly zdát těžké.

4. Mírně těžké úlohy

4.1 Úloha (navrhovaná úloha do MKS). *Na čtvercovém stole 1×1 m leze 51 much. Máme v ruce hrnec o poloměru $1/7$ m. Dokažte, že můžeme chytit tři mouchy jednou ranou.*

Řešení. Stačí umět pokrýt čtverec 1×1 pětadvaceti kruhy o poloměru $1/7$. Potom z Dirichletova principu bude existovat kruh, v kterém budou aspoň 3 mouchy. Nalezení pokrytí necháváme na čtenáři (na rozdíl od úloh uvedených v předchozí kategorii není vidět na první pohled). □

4.2 Úloha ([1]). *Dokažte, že v každé skupině 121 přirozených čísel lze vybrat několik čísel tak, že jejich součet je dělitelný číslem 121.*

Řešení. Označme daná čísla $x_1, \ldots, x_{121}$. Nyní vezmeme součty $x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_1 21$. Je-li některé z těchto čísel dělitelné 121, jsme hotovi. V opačném případě jsou možné zbytky po dělení 121 čísla $1, \ldots, 120$. Tedy, podle Dirichletova principu, existují aspoň dva součty $x_1 + \cdots + x_k$ a $x_1 + \cdots + x_l$ $(k > l)$ se stejným zbytkem po dělení 121. Pak ovšem i jejich rozdíl je dělitelný 121, takže součet $x_{l+1} + \cdots + x_k$ řeší úlohu. □

4.3 Úloha (MKS 98/99). *Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost přirozených čísel s diferencí 60, která je tvořena samými prvočísly.*

Řešení. Snadno ověříme, že čísla 11, 71, 131, 191, 251, 311 jsou prvočísla a tvoří šestičlennou aritmetickou posloupnost s diferencí šedesát. Zkusíme dokázat, že sedmičlenná posloupnost již existovat nemůže.

Předpokládejme, že nějakou máme, odvodíme spor. Nechť začíná číslem a, tj. obsahuje prvky a, $a + 60$, $a + 120$, $\ldots$, $a + 360$. Jelikož prvky jsou prvočísla, nejsou dělitelná sedmi (pokud $a = 7$, tak $a + 180 = 187$ není prvočíslo, takže tento případ neuvažujeme). Podle Dirichletova principu existují mezi těmito čísly aspoň dvě, které dávají při dělení číslem sedm stejný zbytek. Označme je $a + x \cdot 60, a + y \cdot 60$. Jejich rozdíl je $x - y \cdot 60$ a je dělitelný 7. Tedy buď (x-y) je dělitelné 7, nebo 60 je dělitelné 7. Ani jedno neplatí, spor. □

4.4 Úloha (MKS 00/01). *Na šachovnici* 8×8 *stojí* 33 *věží. Dokažte, že z nich lze vybrat* 5*, které se vzájemně neohrožují.*

Řešení. Rozdělme si pole šachovnice na osm skupin po osmi polích následujícím způsobem (pole ve stejné skupině mají stejná čísla):

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Snadno nyní nahlédneme (šachovnici jsme totiž v podstatě rozdělili po úhlopříčkách), že věže stojící jen v jedné z osmi skupin se vzájemně neohrožují. Stačí proto ukázat, že alespoň jedna ze skupin obsahuje alespoň pět věží. K tomu použijeme Dirichletův princip.

Celkově máme na šachovnici 33 věží, z nichž každá může být v jedné z osmi skupin. Jelikož $33 > 4 \cdot 8$, vidíme z Dirichletova principu, že existuje skupina, která obsahuje pět věží, těchto pět věží se vzájemně neohrožuje a úloha je vyřešena. □

4.5 Úloha (MKS 00/01). *Hrací plán na „Člověče, nezlob se" je tvořen kružnicí s 36 políčky. Kolik nejméně potřebujeme figurek, abychom při jejich libovolném rozmístění a libovolném hodu kostkou mohli nějakou figurku jinou figurkou vyhodit?*

Řešení. Mějme nejprve 18 figurek rozestavených tak, že se obsazená a prázdná políčka střídají. Hodíme-li nyní na kostce jedničku (nebo trojku nebo pětku), pak nemůžeme vyhodit žádnou jinou figurku. 18 figurek tedy nestačí.

Nyní dokážeme, že 19 figurek stačí. Mějme tedy libovolné rozestavení těchto devatenácti figurek a předpokládejme, že nám na kostce padlo číslo k. Předpokládejme, že figurky jsou rozestavené tak, že žádná žádnou nemůže vyhodit a chceme dospět ke sporu. Posuňme tedy první figurku o k políček. Toto políčko musí být prázdné. Posuňme druhou, třetí atd. Jistě se nám nemůže stát, že bychom dvě figurky posunuli na stejné políčko. Máme tedy 19 políček, na kterých stojí figurky, a 19 cílových políček, která musí být prázdná. Celkem jsme tedy našli 38 různých políček, ale máme jich jen 36. A to je spor. □

4.6 Úloha (navrhovaná úloha do MKS). *Je dána dvacetiprvková množina A po dvou nesoudělných přirozených čísel. Definujme $B = \{x^y : x, y \in A\}$,. Dokažte, že množina B obsahuje dva prvky jejichž rozdíl je dělitelný 379.*

Řešení. Snadno nahlédneme, že množina B obsahuje aspoň 381 prvků — přesně 400, pokud $1 \notin A$, přesně 381, pokud $1 \in A$. Z Dirichletova principu tedy existují aspoň dvě se stejným zbytkem po dělení 379. Jejich rozdíl je dělitelný 379. $\square$

5. Těžké úlohy

5.1 Úloha (MKS 00/01). *Město New York se skládá ze* 151 *severojižních a* 151 *východozápadních ulic, které tvoří pravidelnou čtvercovou síť o hraně* 100 *metrů (šířku ulic zanedbáváme). V ulicích města je* 11401 *telefonních automatů. Ukažte, že ve městě existuje dvojice telefonních automatů, které jsou od sebe vzdáleny nejvýše* 200 *metrů chůze po ulici.*

Řešení. Vezměme křižovatku a čtyři přilehlé ulice (100 metrů každým směrem). Pokud na tomto území stojí dvě telefonní budky, pak jejich vzdálenost je nejvýše 200 metrů chůze. Chceme tedy ukázat, že New York můžeme pokrýt malým počtem takovýchto oblastí.

Kde budou ležet centra těchto oblastí? Na první severojižní ulici to bude na křižovatce s druhou, čtvrtou, ... východozápadní ulicí. Stejné to bude na třetí, páté, a všech lichých severojižních ulicích. Na sudých budou centra ležet na křižovatkách s lichými východozápadními ulicemi. Snadno se spočítá, že na pokrytí New Yorku tímto způsobem potřebujeme $75 \cdot 151 + 75 = 11400$ oblastí. To je ale náhoda, telefonních budek je tu 11401, tak to musí v alespoň jedné oblasti být aspoň dvě budky. $\square$

5.2 Úloha (MKS 94/95). *Mezi libovolnými osmi složenými přirozenými čísly menšími než 360 existují vždy dvě čísla, která nejsou nesoudělná.*

Řešení. Protože $19^2 = 361$, můžeme každé složené číslo menší než 360 zařadit do jedné z množin $A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17}$ podle toho, jaký je jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Podle Dirichletova principu , vybereme-li z těchto sedmi množin osm prvků, musíme z aspoň jedné množiny vybrat aspoň dva prvky. Bylo-li to A_p, tak tato dvě čísla mají společného dělitele p. $\square$

5.3 Úloha (MO Jugoslávie 1972). *Pro každé přirozené číslo n najděte co největší přirozené číslo k takové, že z každé n-prvkové množiny lze vybrat k různých podmnožin, které mají po dvou neprázdný průnik.*

Řešení. Mějme n-prvkovou množinu X, zvolme pevně $a \in X$. Budeme uvažovat všechny podmnožiny obsahující a. Těch je 2^{n-1}, tedy nutně $k \geq 2^{n-1}$.

Na druhou stranu, mějme vybráno více než 2^{n-1} podmnožin X. Rozebereme všechny možné podmnožiny X na 2^{n-1} párů, kde každý pár obsahuje množinu a její doplněk. Podle Dirichletova principu aspoň jeden pár se vyskytuje mezi našimi vybranými podmnožinami. Tyto dvě podmnožiny jsou ovšem disjunktní, čímž máme spor. $\square$

5.4 Úloha (MKS 00/01). *Nechť n je přirozené číslo. Z čísel* $1,\ 2,\ \dots,\ 2n$ *vybereme libovolných* $n+1$. *Dokažte, že mezi vybranými čísly vždy existují dvě různá čísla, z nichž jedno dělí druhé.*

Řešení. Každé z $n+1$ vybraných čísel vyjádříme ve tvaru $2^{k_i} l_i$, kde k_i, l_i jsou přirozená čísla, l_i je liché. Možné hodnoty l_i jsou $1, 3, \dots, 2n-1$, tedy celkem n hodnot. My máme vybráno $n+1$ čísel, tudíž pro nějaké $a \neq b$ platí $l_a = l_b$. Zjevně menší z čísel $2^{k_a} l_a$, $2^{k_b} l_b$ dělí to větší. $\square$

5.5 Úloha (MKS 98/99). *Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ danou rekurentně $a_{n+4} = pa_{n+3} + qa_{n+2} + ra_{n+1} + sa_n$ (p, q, r a s jsou celá čísla, $n \geq 0$), počáteční hodnoty $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Definujme posloupnost $b_n = a_n$ mod 9. Pro jaká čísla p, q, r, s je číslo s desetinným zápisem $0,b_1b_2b_3\dots$ racionální?*

Řešení. Číslo $0,b_1b_2b_3\dots$ je racionální právě tehdy, když posloupnost $\{b_i\}_{i=k}^{\infty}$ je periodická (k je délka předperiody). (Protože $b_i \neq 9$, nemusíme zvlášť rozebírat periody samých devítek.) Zkusíme dokázat, že tato posloupnost je periodická pro libovolná $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

Člen a_{n+4} lze spočítat pomocí $a_{n+3}, \dots, a_n$. Totéž platí i pro posloupnost $\{b_n\}$, neboť

$$b_{n+4} = a_{n+4} \bmod 9 = (pa_{n+3} + \cdots + sa_n) \bmod 9 =$$
$$\big(p(a_{n+3} \bmod 9) + \cdots + s(a_n \bmod 9)\big) \bmod 9 = (b_{n+3} + \cdots + b_n) \bmod 9.$$

Existuje nejvýše 9^4 různých čtveřic $(b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3})$ (každý prvek čtveřice je číslo mezi 0 a 8), posloupnost se tedy musí po nejvýše 9^4 členech začít opakovat (podle Dirichletova principu) Tedy jak předperioda tak i perioda posloupnosti $\{b_n\}$ mají délku nejvýše 9^4, to vše pro libovolné $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Proto vychází číslo $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ racionální. $\square$

5.6 Úloha (MO Anglie 1976). *Mějme v dané konečné množině X vybraných 50 podmnožin $A_1, \dots, A_n$ takových, že každá z nich obsahuje více než polovinu prvků X. Dokažte, že lze najít $B \subseteq X$ s nejvýše pěti prvky mající neprázdný průnik s každou z $A_1, \dots, A_n$.*

Řešení. Důkaz je poněkud technický, proto čtenáče odkazujeme na [2], str. 344. $\square$

6. Těžké úlohy

6.1 Úloha (MKS 00/01). *Na stole tvaru čtverce 1×1 metr je umístěno několik koláčků (možná se někde překrývají, ale jistě nepřesahují okraj stolu). Celkový obvod všech koláčků je 10 metrů. Ukažte, že je možné jedním řezem nožem (tj. jednou přímkou) protnout alespoň 4 koláčky.*

Řešení. Součet průměrů všech koláčků je $10/\pi$ metrů, tedy více než tři metry. Zvolme jednu hranu stolu a všechny koláčky na ni (kolmo) promítneme. Koláček o průměru d se zjevně promítne na úsečku o délce d. Celkem tedy na hraně stolu dlouhé jeden metr máme několik úseček, jejichž celková délka je více než tři metry, tudíž nějakým bodem musí procházet alespoň čtyři úsečky. Kolmice k hraně stolu vztyčená v tomto bodě tedy protíná alespoň čtyři koláčky a důkaz je hotov (použili jsme princip podobný Dirichletovu, ovšem místo počtu rozmisťovaných kuliček – zde bodů – jsme použili délku). $\square$

6.2 Úloha (MKS 94/95). *Během semináře, na který se dostavilo pouze pět studentů, každý z těchto studentů právě dvakrát usnul. Ke každé dvojici těchto studentů existoval okamžik, kdy spali oba z dvojice současně. Dokažte, že existoval okamžik, kdy spali alespoň tři studenti současně.*

Řešení. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Pak existuje deset navzájem disjunktních časových intervalů, kdy spí právě dva studenti. Počáteční bod takového intervalu je okamžik, kdy usnul nějaký student. Vzhledem k tomu, že každý z pěti studentů usnul právě dvakrát, dostáváme tak vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi těmito intervaly a okamžiky, kdy jednotliví studenti usínali. Ovšem v počátečním bodě prvního intervalu usnuli právě dva studenti. Čímž dostáváme spor. $\square$

6.3 Úloha (MKS 94/95). *V rovině je dáno n nekolineárních bodů $x_1, \dots, x_n$, z nichž některé jsou spojeny úsečkami (existuje aspoň jedna). Stupeň bodu x_k bude značit počet bodů, s nimiž je x_k spojen úsečkou. Nechť platí, že pro každé dva body se stejným stupněm neexistuje žádný bod s oběma spojený úsečkou. Potom existuje bod se stupněm 1.*

Řešení. Sporem. Nechť jsou všechny stupně různé od jedné. Nechť x značí bod s největším stupněm P, tj. bod x je spojen úsečkou s právě P jinými body. Protože každé dva z nich mají společného souseda (bod x), musí mít podle předpokladu každé dva z nich různé stupně. Možné hodnoty jsou však $2, \dots, P$. Těchto čísel je ovšem $P - 1$, což dává spor s tím, že jim chceme přiřadit (po dvou různě) P bodů. $\square$

6.4 Úloha (MKS 97/98). *Buď M množina n bodů v prostoru ($n > 2$). Spojnice těchto bodů (úsečky) nechť jsou různě dlouhé a r z nich je obarveno. Dále budiž m nejmenší celé číslo, pro které platí: $m \geq \frac{2r}{n}$. Dokažte, že existuje tah (tj. lomená čára, která může sama sebe libovolně protínat) z m obarvených úseček, v kterém jsou tyto vzestupně uspořádány podle délky.*

Řešení. Představíme si obarvené úsečky jako síť r cestiček a body jako lidi. Nejprve si mohou vyměnit místa lidé stojící na krajích nejkratší cestičky, pak lidé stojící na krajích druhé nejkratší cestičky, ..., až nakonec lidé na krajích nejdelší cestičky. Tímto způsobem projdou každou cestičkou právě dva lidé, celkově se tedy procestuje $2r$ cestiček. Dle Dirichletova principu tedy musí nějaký člověk projít aspoň $\frac{2r}{n}$ cestiček. Jelikož se cesta každého člověka skládá z na sebe navazujících cestiček rostoucí délky, je zaručena existence obarvené cesty z minimálně m úseček rostoucí délky. $\square$

6.5 Úloha (MKS 00/01). *Šachový velmistr Pavel se chystá na důležitý turnaj. Na trénink má 76 dnů, každý den chce sehrát alespoň jednu partii, celkem však ne více než 132. Ukažte, že v nějakých po sobě jdoucích dnech sehrál přesně 21 partií.*

Řešení. Zkusme nejprve tuto úlohu řešit pro 77 dnů namísto 76. Základ úspěšného řešení je dobré značení, označme tedy s_i počet partií, které Pavel sehrál do dne i včetně (tedy $s_0 = 0$, s_1 je počet partií odehraných první den, $s_{77} \leq 132$). Protože každý den odehrál alespoň jednu partii, platí $s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{77}$. Hledáme i, j taková, aby $s_i + 21 = s_j$ (což značí, že ve dnech $i+1$, $i+2$, ..., j Pavel odehrál 21 partií). Uvažme proto čísla $s_0, \dots, s_{77}, s_0 + 21, \dots, s_{77} + 21$. Jedná se o $2 \cdot 78 = 156$ čísel mezi 0 a $132 + 21 = 153$.

Určitě tedy (podle Dirichletova principu) nějaká dvě z nich mají stejnou hodnotu. Protože čísla s_i (a tedy i $s_i + 21$) tvoří rostoucí posloupnost, je jedno z těch dvou stejných čísel s_j (pro nějaké j) a druhé $s_i + 21$ (pro nějaké i), jsme tedy hotovi.

Zkusíme-li nyní stejný postup použít pro zadanou úlohu, zjistíme, že máme $2 \cdot 77 = 154$ čísel mezi 0 a 153, a tedy Dirichletův princip nám neřekne nic. Nebudeme však zoufat a zkusíme v řešení pokračovat. Pokud by náhodou byla dvě z oněch 154 čísel stejná, dokončíme důkaz tak jako minule. Jinak zjevně musí čísla s_i a $s_i + 21$ nabývat každé hodnoty mezi 0 a 132 právě jednou. Zjevně je tedy $s_i = i$ pro $i = 0, 1, \dots, 20$. Čísla $21, \dots, 41$ jsou už použita čísly $s_i + 21$, takže pro $i = 21, \dots, 41$ platí $s_i = i + 21$ atd. Když budeme takto dále pokračovat, postupně odvodíme $s_{42} = 84$, $s_{43} = 85$, $\dots$, $s_{63} = 126$, $s_{64} = 127$, $\dots, s_{69} = 132$. Pro hodnotu s_{70} a další již nezbyde volná hodnota (tento problém byl způsoben tím, že číslo 21 nedělí 154). Úloha je vyřešena. $\square$

6.6 Úloha (MKS 00/01). *Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze z rostoucí posloupnosti všech prvočísel vybrat několik bezprostředně po sobě následujících členů tak, že tyto napsané za sebou v desítkové soustavě (například 35711, nebo 7111317 apod.) tvoří číslo, které je delitelné n.*

Řešení. Nejprve předpokládejme, že n je dělitelné dvěma, nebo pěti. Pokud sudé n má dělit číslo a tvořené posloupností po sobě jdoucích prvočísel, pak a musí končit sudou číslicí, tedy poslední prvočíslo v zápisu a musí být 2. Pak ale nutně $a = 2$ a tedy i $n = 2$. Dělí-li n dělitelné pěti číslo a tvořené posloupností po sobě jdoucích prvočísel, pak a musí končit číslicí 0 nebo 5, tedy poslední prvočíslo v zápisu a musí být 5, takže $a \in \{5,\ 35,\ 235\}$. Číslo n je dělitel a, který je navíc dělitelný pěti, takže $n \in \{5,\ 35,\ 235\}$.

Dále tedy předpokládejme, že n je nesoudělné s 10. Ukážeme, že pak už má n nutně násobek v požadovaném tvaru. Označme si $p_1,\ p_2,\ p_3, \dots$ rostoucí posloupnost všech prvočísel a pro $k \le l$ dále označme $a_{k,l}$ číslo, jehož dekadický zápis je tvořený posloupností čísel $p_k, p_{k+1}, \dots, p_l$. Uvažujme čísla $a_{n+1,n+1}$, $a_{n,n+1}$, $a_{n-1,n+1}$, $\dots$, $a_{1,n+1}$. To je skupina $n+1$ čísel, podle Dirichletova principu tedy mezi nimi existují dvě, které dávají stejný zbytek po dělení n. Nechť jsou to $a_{k,n+1}$ a $a_{l,n+1}$ $(k < l)$. Pak číslo $a = a_{k,n+1} - a_{l,n+1}$ je dělitelné n. Na druhou stranu, číslo a lze psát ve tvaru $a = a_{k,l-1} \cdot 10^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Jelikož n je nesoudělné s 10, musí n dělit číslo $a_{k,l-1}$, což je číslo v požadovaném tvaru.

Úlohu tedy řeší čísla $n = 2, 5, 35, 235$ a dále všechna čísla n nesoudělná s 10. $\square$

6.7 Úloha (MKS 00/01). *Dokažte, že existuje nekonečně mnoho mocnin čísla 3, jejichž desítkový zápis začíná na 11122000.*

Řešení. Řešení lze nejsnáze provést pomocí následujícího užitečného lemmatu. Nejprve však něco definic. Pro reálné číslo x značíme pomocí $\{x\}$ tzv. *necelou část čísla* x, tj. takové číslo $y \in \langle 0,1)$, že $x - y$ je celé číslo. Řekneme, že množina M je *hustá* v intervalu $\langle a,b\rangle$, právě tehdy, když pro libovolný interval (x,y), který je částí $\langle a,b\rangle$, existuje $m \in M$, pro které $m \in (x,y)$. Jinými slovy, pokud otevřené intervaly považujeme za velké množiny, hustá množina je taková, která obsahuje z každé velké množiny nějaký prvek.

Lemma. *Je-li α iracionální číslo, pak $\{\{n\alpha\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $\langle 0,1\rangle$.*

Než toto lemma dokážeme, ukažme si, jak jeho pomocí vyřešíme naši úlohu. Chceme najít nekonečně mnoho n, aby

$$11122000 \cdot 10^k \le 3^n < 11122001 \cdot 10^k.$$

Po zlogaritmování (o základu 10):

$$\log_{10} 11122000 + k \le n \log_{10} 3 < \log_{10} 11122001 + k. \qquad (*)$$

Označme $x = \{\log_{10} 11122000\}$, $y = \{\log_{10} 11122001\}$. Protože $\log_{10} 3$ je iracionální (rozmyslete si proč!), podle lemmatu existuje n, pro něž $x < \{n \log 3\} < y$. Pro vhodné k tedy platí nerovnost $(*)$. Takto jsme našli jedno n. Označíme nyní $x = \{n \log 3\}$, y necháme stejné. Opět použijeme lemma a najdeme nové n, které opět vyhovuje. Pokračujeme dále a dostaneme nekonečně mnoho vyhovujících čísel n.

Důkaz lemmatu. Mějme nějaké $0 \le x < y \le 1$, označme $\varepsilon = y - x$. Nejprve najdeme n, pro které $\{n\alpha\} < \varepsilon$. Zvolme m přirozené tak, aby $1/m < \varepsilon$ a podívejme se na $m+1$ čísel $\{0\alpha\}, \{1\alpha\}, \dots, \{m\alpha\}$. Rozdělíme-li interval $\langle 0,1)$ na m stejně velkých intervalů, pak (podle Dirichletova principu) v jednom z těchto intervalů jsou dvě z našich čísel, čili jsme našli k, l taková, že $0 < \{k\alpha\} - \{l\alpha\} \le 1/m < \varepsilon$. Ovšem $\{k\alpha\} - \{l\alpha\} = \{(k-l)\alpha\}$, tedy stačí položit $n = k - l$.

Předpokládejme nejprve, že $n > 0$. Uvažujme nyní čísla $0, \{n\alpha\}, \{2n\alpha\}, \{3n\alpha\}, \dots$ První z těchto čísel (tj. 0) neleží v intervalu (x,y). Další číslo je vždy o méně než $\varepsilon = y - x$ větší, než to předešlé, tedy čísla nemohou interval (x,y) přeskočit. Toto pokračuje, dokud přičtením ε nepřeskočíme 1 (a tedy „nespadneme k nule“), to se ovšem nestane dříve, než přejdeme přes interval (x,y). Tudíž jednou do tohoto intervalu vstoupíme, tj. jedno z čísel $\{tn\alpha\}$ leží v intervalu (x,y), což jsme chtěli dokázat.

Pokud je $n<0$, pak nejprve analogicky jako v předchozím odstavci najdeme t, pro které $1-\varepsilon<\{tn\alpha\}<1$. Položíme-li nyní $n'=-tn$, bude $n'>0$ a $0<\{n'\alpha\}<\varepsilon$, můžeme tedy dále postupovat stejně jako v předchozím odstavci. $\square$

References

1. O. Odvárko, E. Calda, J. Šedivý, S. Židek, *Metody řešení matematických úloh*, SPN Praha, 1990.
1. И. Н. Сергеев, *Зарубежные математические олимпиады*, Наука Москва, 1987.

David Stanovský, stanovsk@karlin.mff.cuni.cz