Diofantické rovnice

KUBA SVOBODA

ABSTRAKT. Diofantické rovnice jsou prastarou součástí matematiky. Tento příspěvek obsahuje některé jejich druhy a vybrané postupy řešení těchto rovnic.

Diofantické rovnice je souhrnný název pro rovnice, kde nás zajímá přirozené, celočíselné, případně racionální řešení. Na diofantické rovnice neexistuje žádný obecný trik, ale kolem jejich řešení je rozvinutá zajímavá teorie. Z množiny existujících diofantických rovnic si vybereme ty, které se spíše objevují v olympiádách a mají hezké a pochopitelné řešení.

Rozklad na součin

Při rozkládání na součin využíváme faktu, že každé číslo lze rozložit na prvočísla nebo že některá čísla jsou nesoudělná. Potom už stačí jen výraz vhodně upravit, aby součin byl vidět, poté spočítáme jen triviální soustavu rovnic.

Úloha 1. Buďte p a q dvě prvočísla. Vyřešte tuto rovnici v přirozených číslech:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}.$$

Úloha 2. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + 3x = y^3 - 2$.

Úloha 3. Najděte všechna nezáporná řešení rovnice

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

Úloha 4. Najděte všechny trojice přirozených čísel x, y, z takové, že platí

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 17.$$

Bonus: Řešte rovnici $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$, kde p je libovolné prvočíslo větší než 3.

Úloha 5. Vyřešte v $\mathbb{N}$ rovnici $p - y^4 = 4$, kde p je prvočíslo.

Úloha 6. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y splňujících $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

Počítání modulo

Pokud zvládnete zjistit, jaký dává neznámá zbytek po dělení dvěma, už vám stačí vyzkoušet jen polovinu toho, co jste museli předtím. Někdy je tato metoda ještě silnější a výsledek vypadne po několika úvahách.

Úloha 7. F_n je n-té Fibonacciho číslo ($F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Najděte všechny dvojice $a, n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$F_n + F_{2n} + F_{3n} = a! + 43.$$

Úloha 8. Najděte všechna $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že platí $1! + 2! + 3! + \cdots + n! = m^2$.

Úloha 9. Dokažte, že rovnice

$$x^2 = 3 - 8z + 2y^2$$

nemá řešení v celých číslech.

Úloha 10. Řešte v přirozených číslech rovnici $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$.

Úloha 11. Dokažte, že rovnice

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+2001)^2 = y^2$$

nemá řešení v celých číslech.

Úloha 12. Dokažte, že rovnice

$$x^5 - y^2 = 4$$

nemá řešení v celých číslech.

Úloha 13. Najděte všechny páry přirozených čísel x, y, pro které platí

$$x^2 - a! = 1996.$$

Nerovnosti

Využijeme jednoduché tvrzení, a to, že neexistují x, y a n přirozená tak, že

$$y^n < x^n < (y+1)^n.$$

Také můžeme použít faktu, že některé nejmenší číslo může být hodně malé, což celou úlohu zjednoduší.

Úloha 14. V $\mathbb{N}$ řešte rovnici $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

Úloha 15. Najděte všechny trojice (x, y, z) přirozených čísel takových, že

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2.$$

Úloha 16. Vyřešte v přirozených číslech rovnici $3(xy + yz + zx) = 4xyz$.

Úloha 17. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{Z}$, pro něž platí $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Úloha 18. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 + \cdots + (x + 7)^3 = y^3.$$

Úloha 19. Najděte všechny trojice přirozených čísel x, y, z, která splňují rovnici

$$(x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2.$$

Úloha 20. Najděte přirozená čísla n a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ taková, že

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = 5n - 4,$$

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\cdots+\frac{1}{k_n}=1.$$

Fermatova metoda nekonečného sestupu

Tvrzení. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Tato metoda funguje jednoduše. Místo toho, abychom hledali řešení, si představíme, že řešení už máme. Pomocí tohoto řešení nalezneme jedno menší. A pomocí toho zase další, které je menší… No a tak dále.

Úloha 21. Najděte všechna řešení v nezáporných celých číslech rovnice

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

Úloha 22. Najděte všechny trojice $x, y, z \in \mathbb{N}$, které splňují rovnici

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0.$$

Úloha 23. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + y^2 = 7z^2$.

Úloha 24. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $\frac{x-y^2}{y}+\frac{y-x^2}{x}=(x-1)(y-1)$.

Úloha 25. Vyřešte v celých číslech rovnici $x^4 + y^4 + z^4 = 9u^4$.

Úloha 26. Řešte v přirozených číslech následující rovnici: $x^2 - y^2 = 2xyz$.

Další úlohy

Pokud se vám chce řešit, můžete, pokud ne, tak to máte na doma.

Úloha 27. Pro každé přirozené $n \geq 3$ dokažte, že existují různá čísla $x_1, x_2, \dots x_n$ splňující rovnici $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$.

Úloha 28. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 59^n$ řešitelná v $\mathbb{N}$.

Úloha 29. (Velká Fermatova věta pro $n = 4$) Dokažte, že rovnice $x^4 + y^4 = z^4$ nemá řešení v přirozených číslech.

Návody

1. Co kdybychom po roznásobení na každou stranu přidali p^2q^2?

2. Znáte dvě po sobě následující čísla, které jsou třetí mocninou?

3. Co kdyby bylo vlevo jen $(xy - 6)^2$?

4. Vyzkoušejte, čemu se rovná $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - zy - xz)$.

5. Co nám zbude, když dáme $(y^4 + 2)^2$?

6. $(x^3 + 1)^2 + x^3 + 1 = y^4 + 1$ a potom vynásobte 4.

7. Něco je liché a něco je sudé…

8. Stačí najít správné číslo, kterým modulit.

9. Je jen pár možností, jaké zbytky může dávat druhá mocnina.

10. Zase modulte správným číslem.

11. Substituujte $x = y - 1001$.

12. Se znalostí Fermatovy věty je příklad jednodušší.

13. Zase najděte správné číslo.

14. $4^a = 2^{2a} = (2^a)^2$. Kolik je potom $(2^a + 1)^2$?

15. Jaké může být nejmenší číslo, jaké největší?

16. Vydělte to tak, aby na jedné straně byly jen neznámé a na druhé čísla, a potom se zase zeptejte, jaké může být nejmenší a jaké největší.

17. Co roste rychleji?

18. Kolik je tam x? Sevřete to mezi dvě třetí mocniny.

19. Zase sevřete mezi dvě druhé mocniny.

20. Tady použijte slavné nerovnosti. Buď harmonický-aritmetický průměr nebo Cauchyho-Schwarzovu.

21. Nejjednodušeji, jak to jde.

22. Co třeba trojka, jaký zbytek po dělení třemi dává x?

23. Když je tam napsaná sedmička, co kdybych zkusil ji?

24. Nějaká úprava, třeba na $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$, a potom jsou tam dvě neznámé, tak co třeba dvěma?

25. Co třeba malý Fermat? Pomůže?

26. Tentokrát vyzkoušíme obecné p, co dělí v pravo, musí dělit vlevo.

27. Z náhodně nalezeného řešení pro $n = 3$ pak vyrobíme další.

28. Pokud už máme jeden výsledek, máme ho i pro $n + 2$.

29. Stačí si uvědomit, že $x^4 = (x^2)^2$, no a ještě pár dalších věcí.

Zdroje

Čerpal jsem zejména z knihy *Úvod do diofantických rovnic* od Titu Andreescu.