Diofantické rovnice

Jiří Koula

Tato přednáška se, jak název napovídá, bude zabývat diofantickými rovnicemi. To jsou rovnice, u kterých nás zajímají pouze celočíselná řešení. Spíše než o vybudování nějaké ucelené teorie se zaměříme na metody, které nám mohou při zápolení s těmito rovnicemi pomoci, a na některá tvrzení z této oblasti matematiky, zejména proto, že žádná ucelená teorie, která by nám dala univerzální postup na řešení těchto rovnic, neexistuje.

Jednou z použitelných zbraní jsou kogruence.

Definice. *Nechť $a,b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Potom řekneme, že a je kongruentní s b při modulu m (a píšeme $a \equiv b \pmod{m}$) právě tehdy, když $m|(b-a)$. Jinak řečeno, když po dělení m dávají a a b stejný zbytek.*

Další užitečným postupem je Fermatova metoda nekonečného klesání. Tu použijeme v případě důkazu neexistence řešení. Myšlenka spočívá v tom, že předpokládáme existenci kladného celočíselného řešení a z něj zkonstruujeme nějaké menší. Toto opakujeme znova a znova, čímž dostáváme nekonečnou klesající posloupnost přirozených čísel. To je ovšem spor, neboť přirozená čísla jsou dobře uspořádaná, to znamená, že z každé jejich podmnožiny lze vybrat nejmenší prvek.

A na závěr nějaká tvrzení a věty, o kterých se na přednášce zmíním.

Tvrzení. Všechna řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ v přirozených číslech jsou tvaru

$$x = 2ab,\ y = a^2 - b^2 \text{ a } z = a^2 + b^2,$$

kde a, b jsou přirozená nesoudělná čísla opačné parity.

Věta. (Fermat) *Pro žádné přirozené $n > 2$ nemá rovnice $x^n + y^n = z^n$ řešení v celých číslech.*

Věta. (Lagrange) *Rovnice $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ má řešení v $\mathbb{N}_0$ pro všechna přirozená čísla n.*

Věta. (Lagrange) *Rovnice $x^2 - dy^2 = 1$, kde $d \in \mathbb{N}$ není druhou mocninou, má nekonečně mnoho celočíselných řešení[1].*

Věta. (Matijasevič) *Řešitelnost diofantických rovnic je algoritmicky nerozhodnutelná úloha.*

[1] Této rovnici se říká Pellova.