Diofantické rovnice

Filip Hlásek

Abstrakt. V úvodu přednášky si dokážeme Velkou Fermatovu větu a poté se podíváme na zoubek několika otevřeným problémům … No, možná se do toho pustíme spíše trochu opatrněji a naučíme se nejprve základní metody používané k řešení diofantických rovnic.

Úmluva. Ve všech úlohách budeme uvažovat $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ a budeme hledat všechna řešení daných rovnic.

Počítání modulo

První metoda řešení diofantických rovnic, kterou si ukážeme, je užitečná především tehdy, když tušíme, že zadaná rovnice nemá řešení. Potom je vhodné se na ni podívat modulo nějaké číslo, po kterém některé členy dávají jenom některé zbytky. Pokud všechno dobře dopadne, zjistíme, že po dělení tímto číslem dávají strany rovnice různé zbytky, takže rovnice určitě žádné řešení nemá. Volba vhodných modulů vyžaduje cvik, takže si vyřešíme několik příkladů.

Příklad 1. $7x^2 + 5y + 14 = 0$

Řešení. Levá strana rovnice dává po dělení pěti stejný zbytek jako $2x^2 + 4$, ale jelikož x^2 dává pouze zbytky 0, 1 a 4, tak nikdy nemůže vyjít nula a zadaná rovnice proto nemá žádné řešení.

Příklad 2. $2^x = 11 + 7y$

Příklad 3. $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$ (PraSe 1987)

Příklad 4. $2^a = 1 + 3^b$

Rozlož to!

Zadaná rovnice se dá mnohdy pěkně upravit na součin. Pokud je navíc na jedné straně prvočíslo nebo nějaké konkrétní číslo, pak rovnou známe všechny jeho rozklady. Rozklad se může hodit i jindy, pokud o činitelích víme, že jsou nesoudělné. Opět si zkusíme tuto teorii aplikovat v praxi.

Příklad 5. $p + 400 = a^2$, kde p je prvočíslo (PraSe 2012)

Řešení. Rovnici upravíme do tvaru $p = (a - 20)(a + 20)$. Protože p je prvočíslo, tak musí nutně platit $a - 20 = 1$ a také $a + 20 = p$. Z toho plyne $a = 21$ a $p = 41$, což je skutečně jediným řešením této rovnice.

Příklad 6. $x^2 + 3x = y^3 - 2$

Příklad 7. $xy + yz + zx = xyz + x + y + z$

Příklad 8. $a^2b + ab^2 = 2(a^3 + b^3)$ (PraSe 2002)

Po sobě jdoucí mocniny

Tvrzení. *Neexistují x, y, a taková, že $x^a < y^a < (x + 1)^a$.*

Toto zdánlivě jednoduché tvrzení má překvapivě mnoho uplatnění. Pokud má být například nějaký výraz roven čtverci, pokusíme se najít dva po sobě jdoucí čtverce, které ho semknou mezi sebe, a to nám zaručí neexistenci řešení. Vtip potom spočívá v tomto semknutí. Jak si ukážeme, někdy to nemusí být vůbec jednoduché.

Příklad 9. $x^2 = y(y + 2)$

Řešení. Pokud je y kladné, tak platí $y^2 < y(y + 2) < (y + 1)^2$ a rovnice tedy podle uvedeného tvrzení nemá žádné řešení. Podobně pro $y < -2$ snadno ukážeme $(y + 2)^2 < y(y + 2) < (y + 1)^2$ a zbývají tedy pouze tři možnosti pro y. Po dosazení do zadané rovnice zjistíme, že řešením jsou dvě dvojice $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ a $x_2 = 0$, $y_2 = -2$.

Příklad 10. $(a + 3)^3 - a^3 = b^2$

Příklad 11. $a^2 = 9^b + 7$

Příklad 12. $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ (MO 59–A–III–1)

Nekonečný sestup

Poslední metoda se opírá o poměrně jednoduché tvrzení:

Tvrzení. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Když chceme ukázat, že daná rovnice nemá netriviální řešení, uvažujeme nějaké hypotetické řešení a vyrobíme z něj (obvykle pomocí některé z předešlých technik) řešení menší. Z uvedené věty pak plyne, že řešení nemůže existovat. K lepšímu pochopení si to zkusíme na poslední várce příkladů.

Příklad 13. $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 2abc$

Řešení. Předpokládejme, že přirozená čísla a, b, c řeší danou rovnici. Kdyby a bylo liché, tak bychom měli na levé straně liché číslo, ale na pravé strně je číslo sudé.

Proto $a = 2a_1$ a rovnici můžeme upravit do tvaru $4a_1^3 + b^3 + 2c^3 = 2a_1bc$. Analogicky zjistíme $b = 2b_1$ a tedy $2a_1^3 + 4b_1^3 + c^3 = 2a_1b_1c$. Nakonec ze stejného důvodu musí být $c = 2c_1$, a proto $a_1^3 + 2b_1^3 + 4c_1^3 = 2a_1b_1c_1$. Našli jsme tedy menší řešení rovnice, kterým je a_1, b_1, c_1. Stejnými kroky bychom mohli neustále zmenšovat řešení, ale to podle uvedeného tvrzení není možné dělat do nekonečna a původní řešení a, b, c tedy nemůže existovat. Rovnice nemá v přirozených číslech žádné řešení.

Příklad 14. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Příklad 15. $a^4 + 4b^4 = 2(c^4 + 4d^4)$ (PraSe 1992)

Literatura a zdroje

[1] Seriál – Teorie čísel: *http://mks.mff.cuni.cz/archive/28/9.pdf*