Diferenční rovnice aneb o chovu králíků a chobotničkách na žebříku

Tomáš Bárta

Diferenční rovnicí budeme rozumět předpis, který udává závislost n-tého členu nějaké posloupnosti na členech předchozích, tj.

$$a_k = F_k(a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_0)\,.$$

Řekneme, že nekonečná posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je řešením diferenční rovnice, jestliže splňuje výše uvedenou rovnost pro všechna přirozená k. Dále se však budeme zabývat velice speciálním případem s překrásným názvem *soustava lineárních homogenních diferenčních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty*. To je tahle hrůza:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^1 &= a_{11}x_k^1 + a_{12}x_k^2 + \cdots + a_{1k}x_k^n \\
x_{k+1}^2 &= a_{21}x_k^1 + a_{22}x_k^2 + \cdots + a_{2k}x_k^n \\
&\ldots \\
x_{k+1}^n &= a_{n1}x_k^1 + a_{n2}x_k^2 + \cdots + a_{nk}x_k^n\,.
\end{aligned}$$

Pokud ale označíme A matici složenou z koeficientů a_{ij} a $v_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$, dá se napsat v celkem přijatelném tvaru $v_{k+1} = Av_k$.

Mějme tedy nějakou rovnici tohoto typu se zadanými počátečními podmínkami $v_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ a budeme chtít explicitně vyjádřit, čemu se rovná x_k. Podle Jordanovy věty existuje substituce $u_k = Cv_k$ (kde C je regulární matice), která převede naší rovnici na rovnici $u_{k+1} = Bu_k$, kde B je Jordanův kanonický tvar matice A. Pokud je matice B diagonální (například pokud kořeny charakteristického polynomu matice A jsou navzájem různé), dá se nová rovnice snadno vyřešit a po vynásobení maticí C^{-1} získáme řešení původní rovnice $v_{k+1} = Av_k$.[1]

Celý postup nalezení řešení stojí na následujících větách:

Věta. *Pokud matice A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou podobné (tj. existuje regulární matice $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že $A = CBC^{-1}$), pak se jejich charakteristické polynomy rovnají (charakteristický polynom je $\det(A - \lambda I)$, kde I je jednotková matice a definici determinantu je věnována závěrečná poznámka).*

Věta. (Jordan) *Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké matici $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,*

[1] Pokud matice B není diagonální, je potřeba vyřešit rovnici $u_{k+1} = Ju_k$, kde J je Jordanova buňka velikosti větší než jedna, což odpovídá řešení nehomogenních rovnic typu $x_{k+1} = \lambda x_k + P(x)$, kde P je polynom.

která je tvaru

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}, \text{ kde } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

B je až na pořadí matic J_i určena jednoznačně.

K definici determinantu:

Permutací rozumíme funkci $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, která je prostá a na (je to tedy nějaké seřazení čísel $1, 2, \dots, n$). Cyklus délky dvě je permutace, která vymění dvě čísla a ostatní nechá na místě, tj. $\sigma(k) = l$, $\sigma(l) = k$ a $\sigma(i) = i$ pro $i \neq k, l$. Každá permutace se dá rozložit na cykly (skládání permutací rozumíme ve smyslu skládání funkcí), sice ne jednoznačně, ale pro pevnou permutaci π je počet cyklů vždy sudý, nebo vždy lichý. Například permutaci

$$(1, 2, 3, 4, 5) \quad \to \quad (1, 3, 4, 5, 2)$$

dostaneme tak, že nejprve vyměníme 2 a 3, pak 2 a 4 a nakonec 2 a 5. Pokud je počet cyklů sudý, řekneme, že permutace je sudá a $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$, pokud je lichý, je permutace lichá a $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$ (výše uvedená permutace je tedy lichá). Determinant matice A sestávájící z koeficientů $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ je pak definován takto:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

kde S_n je množina všech permutací na n-prvkové množině. To znamená, že vybereme n prvků matice tak, abychom z každého sloupce i z každého řádku vzali právě jeden, a tyto prvky mezi sebou vynásobíme. Výsledky pak sečteme přes všechny možné n-tice (někdy se znaménkem plus, někdy se znaménkem minus).

Například pro matice velikosti 2 a 3 se determinant spočte takto:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad \text{a} \qquad \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Determinanty vyšších řádů se obvykle nepočítají přímo z definice, ale využívá se faktu, že hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k nějakému řádku matice libovolný násobek jiného řádku (důkaz tohoto tvrzení není těžký — stačí se nebát a dosadit do té strašné sumy, kterou je determinant definován). Touto cestou se matice nejprve převede do tvaru, kdy má pod úhlopříčkou samé nuly, pak je jen jedna n-tice, která se skládá ze samých nenulových čísel (taková, aby z každého řádku i sloupce bylo právě jedno číslo) a tu tvoří prvky úhlopříčky — ostatní sčítance jsou tedy rovny nule a determinant matice je roven součinu prvků na úhlopříčce této nové matice.