Derivace (s trochou mýdla)

Kuba Krásenský

Abstrakt. Tento příspěvek patří k přednášce, na které si názorně vysvětlíme, co je to derivace funkce, naučíme se nejdůležitější pravidla pro její výpočet a objasníme si její hlavní způsoby využití.

Při zkoumání nějaké funkce (z podmnožiny $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$) je velmi užitečné vědět, jakou má v daném bodě tečnu. (Nemusí mít žádnou – lze si představit funkce s různými zubatými a „potrhanými" grafy –, ale ty funkce, se kterými se obvykle setkáváme, jsou docela hladké a je k nim možné tečnu přiložit v každém bodě.) Metodu, jak směr této tečny spočítat, objevili (pravděpodobně) nezávisle na sobě Isaac Newton a Gottfried Leibniz, čímž umožnili prudký rozmach matematiky i fyziky.

Definice 1. *Směrnicí* přímky myslíme tangens úhlu, který svírá s osou x. Jestliže má funkce f v bodě x tečnu, pak směrnici této tečny nazýváme *derivací* f v bodě x a značíme $f'(x)$.

Ona průlomová myšlenka pánů Newtona a Leibnize byla, že pokud se f kolem bodu x chová slušně, pak lze směrnici její tečny dost dobře odhadnout směrnicí sečny, která f protíná v bodech x a $x + d$, kde d je nějaké hodně malé číslo. Spočítat tuto směrnici je snadné; je to $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$.

Na přednášce si ukážeme, že zkoumáním chování tohoto výrazu pro malá d si většinou dovedeme představit, co by se stalo, kdybychom za d „dosadili nulu" – čímž právě spočítáme derivaci v bodě x. Veškeré naše počínání bude stát na naprosto pevných matematických základech (však se derivování opírá velká část vyšší matematiky); je ale zajímavější a pro středoškoláka důležitější přibližně chápat, jak derivace fungují a umět je využívat, než je umět zcela rigorózně definovat.

Odvodíme si následující vztahy pro derivace některých elementárních funkcí:

Věta 2. (Tabulka derivací) *Na celém definičním oboru příslušných funkcí platí tyto vztahy:*

(i) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$,
(ii) $(e^x)' = e^x$,
(iii) $(\sin(x))' = \cos(x)$,
(iv) $(\cos(x))' = -\sin(x)$,
(v) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Zatím moc funkcí zderivovat neumíme; to se spraví následující větou, která nám ukáže, jak spočítat derivace funkcí, které jsou definovány s využitím funkcí jednodušších. Symbolem $f \circ g$ myslíme složení funkcí f a g, tj. funkci definovanou vztahem $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; symbolem f^{-1} označujeme inverzní funkci k funkci f, pokud existuje.

Věta 3. (Aritmetika derivací) *Pro každou konstantu c a funkce f a g, pro něž existuje výraz na pravé straně, platí následující vztahy:*

(i) $(cf)'(x) = cf'(x)$,
(ii) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
(iii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
(iv) $(f \circ g)(x)' = f'(g(x))g'(x)$,
(v) $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Skoro každá funkce, se kterou jsme se v životě setkali, je vybudovaná z funkcí x^α, $\sin(x)$ a e^x pomocí konečného počtu sčítání, násobení, skládání a invertování – takže její derivaci umíme spočítat s využitím předešlých dvou vět. Pojďme si to procvičit.

Příklad 4. Spočítejte derivace následujících funkcí (na celém definičním oboru, pokud to lze):

(i) $(1+x)^2$,
(ii) $\sin(2x)$,
(iii) $\sin^2(x) + \cos^2(x)$,
(iv) $\mathrm{tg}(x)$,
(v) 2^x,
(vi) $\arcsin x$,
(vii) $\ln(\cos x)$.

Příklad 5. Odvoďte obecný vzorec pro derivování podílu dvou funkcí.

Využití derivací

No dobrá, většinu funkcí, s nimiž se setkáme, tedy umíme zderivovat. A k čemu nám to bude dobré? Když si uvědomíme, že derivace vyjadřuje směrnici tečny, není pro nás těžké uvěřit následující větě:

Věta 6. *Jestliže má funkce f v bodě x kladnou derivaci, pak je na nějakém jeho okolí ostře rostoucí. Pokud má derivaci zápornou, je naopak na nějakém okolí ostře klesající.*

Z toho už snadno vyplyne následující veledůležitá věta:

Věta 7. *Jestliže má funkce f v bodě x lokální minimum nebo maximum, pak derivace v tomto bodě buď neexistuje, nebo je nulová.*

Příklad 8. Ověřte, že s pomocí předešlé věty správně naleznete body, v nichž může mít funkce sinus maximum či minimum.

Příklad 9. Nalezněte lokální maximum funkce $\ln(2x) - x$.

Příklad 10. Zjistěte pomocí derivování, kde leží vrchol paraboly dané rovnicí $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Příklad 11. Nalezněte extrémy funkce $xe^{-x^2/2}$.

Příklady

Příklad 12. Určete rovnici tečny k funkci $\frac{1-x}{x^2-3}$ v bodě odpovídajícím $x = -2$.

Příklad 13. Prasátko si chce na břehu rovné řeky oplotit obdélníkovou zahradu tak, že na straně přilehlé k řece žádný plot nebude. Má k dispozici osm set metrů pletiva. Jakou největší plochu může mít jeho zahrada?

Příklad 14. Helmut by si přál mít krabici ve tvaru kvádru, jehož podstava má poměr stran $a : b$ roven jeho oblíbenému kladnému α. Jak má dosáhnout co největšího objemu, pokud

a) povrch nesmí překročit zadané S?
b) součet rozměrů $a + b + c$ nesmí překročit zadané S?

Příklad 15. Barbara balí vánoční dárky. Z čtvercového papíru o straně 30 cm vystřihne v rozích čtyři stejné čtverečky a zbytek přehne tak, aby vznikla otevřená krabice. Jak velké čtverečky má odstřihnout, aby byl objem krabice byl maximální?

Příklad 16. (Těžší)

(i) Určete hodnotu výrazu $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$. (Tím máme na mysli číslo, k němuž se blíží členy posloupnosti $\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}, \dots$) Tato část příkladu je zajímavá, ale s derivováním nesouvisí.

(ii) Pro která a lze obdobným způsobem definovat výraz $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$?

Příklad 17. (Těžší) Mějme v rovině čtyři body tvořící vrcholy čtverce. Máme za úkol nakreslit mezi nimi několik čar tak, aby bylo z každého bodu možné dostat se po čárách do každého jiného (byť třeba po dlouhé cestě procházející některým z ostatních bodů). Jaká může být nejmenší celková délka těchto čar? Místo čtverce zkuste uvažovat i obdélník nebo trojúhelník.

Řešte předešlou úlohu pomocí

(i) Derivování,
(ii) elementární geometrie,
(iii) mýdlové vody.