Délky v trojúhelníku

Martina Vaváčková

Motto: *"I can calculate everything."*
Ivan Borsenco, zlatý medailista z IMO 2006

Na přednášce si ukážeme prostou, ale účinnou zbraň při řešení mnohých geometrických úloh. Přesvědčíme se, že s některými úlohami si umíme hravě poradit, ačkoliv jejich syntetické řešení je poměrně komplikované nebo trikové. Jak? Stačí si rozmyslet, že je umíme spočítat.

Odvodíme si některé užitečné vztahy, které nám umožní nahlédnout hlouběji, a řekneme si, v jakých situacích je výhodné je použít. Nakonec společně vyřešíme i pár obtížnějších úloh.

Metrická kritéria

V důkazových úlohách se ve většině případů vyskytuje jen několik typů tvrzení (kolmost dvou přímek, 4 body na jedné kružnici, atd.). Metrická kritéria slouží k převedení těchto tvrzení na algebraické identity.

vlastnost	**kritérium**
rovnost úhlů	podobnost trojúhelníků
kolmost	„$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$“
3 body na přímce	Menelaova věta
4 body na kružnici	mocnost
3 přímky jedním bodem	Cèvova věta

Značení

V celém následujícím textu budu pro prvky trojúhelníku ABC používat jednotné značení:

(i) a, b, c strany, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$
(ii) α, β, γ vnitřní úhly při vrcholech A, B, C
(iii) H ortocentrum, G těžiště
(iv) O střed kružnice opsané, I střed kružnice vepsané
(v) R poloměr kružnice opsané, r poloměr kružnice vepsané
(vi) I_a, I_b, I_c středy kružnic připsaných stranám a, b, c
(vii) r_a, r_b, r_c poloměry kružnic připsaných stranám a, b, c
(viii) $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ polovina obvodu, K obsah

Sinová a kosinová věta, výšky

Věta. (Sinová, kosinová) *V trojúhelníku ABC platí:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Tvrzení. (Zřejmé) *V trojúhelníku ABC označme D patu výšky na stranu a. Pak platí $|AD| = c\sin\beta = b\sin\gamma$, $|BD| = c\cos\beta$ a $|CD| = b\cos\gamma$.*

Cvičení. S využitím poznatků o výškách ověřte platnost kosinové věty.

Strany a úseky

Tvrzení. (Úseky) *Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, pak existují reálná čísla $x, y, z > 0$ taková, že*

$$a = y + z,\ b = x + z,\ c = x + y,$$

neboli

$$x = s - a,\ y = s - b,\ z = s - c.$$

Tato čísla odpovídají délkám úseků stran vyťatých body dotyku kružnice vepsané.

Cvičení. Najděte poměr, v němž dělí strany trojúhelníka body dotyku kružnic připsaných.

Tvrzení. (Obsah trojúhelníka) *Pro obsah trojúhelníka ABC platí:*

$$K = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{abc}{4R},$$

$$K = sr = (s-a)r_a = xr_a,$$

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Cvičení 1. Ukažte, že $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

Cvičení 2. Vyjádřete R a r pomocí úseků x, y, z. Dokažte, že platí $R \geq 2r$.

Druhé mocniny

Věta. (Stewartova) *Nechť ABC je trojúhelník a M libovolný bod na straně BC. Položme $|AM| = d, |BM| = m, |CM| = n$ a strany trojúhelníka označme obvyklým způsobem. Potom platí*

$$a(d^2 + mn) = b^2 m + c^2 n.$$

Tvrzení. (Délka těžnice a osy úhlu) *Je-li l_a osa úhlu a m_a těžnice na stranu a, pak pro jejich délky platí:*

$$l_a^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right), \qquad m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Cvičení. Ukažte, že výše uvedené tvrzení vyplývá ze Stewartovy věty. Spočítejte délku spojnice bodu dotyku kružnice vepsané a připsané s protějším vrcholem.

Tvrzení. (Kritérium kolmosti) *Čtyřúhelník $ABCD$ má kolmé úhlopříčky právě tehdy, když platí $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.*

Poslední krůček

Ačkoliv už umíme geometrickou úlohu převést na důkaz identity, nemáme ještě zcela vyhráno! Abychom se mohli dopracovat k cíli, potřebujeme vše vyjádřit jednotně pomocí základních prvků trojúhelníka, tedy stran nebo úhlů.

Jestliže se nám podaří dospět k vyjádření pomocí stran, je úloha prakticky vyřešená. Pokud se rozhodneme pro siny a kosiny úhlů, musíme mít při následné úpravě výrazů na paměti několik věcí:

(1) v argumentech je potřeba mít stejné násobky základních úhlů,
(2) existují goniometrické vzorce, nebojíme se je používat,
(3) pro součet úhlů v trojúhelníku platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Sbírka příkladů

Příklad 1. Buď H ortocentrum a D pata výšky na stranu BC v trojúhelníku ABC. Dokažte, že $|AH| = 2R\cos\alpha$ a $|HD| = 2R\cos\beta\cos\gamma$.

Příklad 2. Pro libovolný trojúhelník ABC platí, že obsah trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnice vepsané je roven obsahu trojúhelníka s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných. Dokažte.

Příklad 3. Mějme trojúhelník ABC. Ukažte, že obsah trojúhelníku s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných je menší než čtvrtina obsahu $\triangle ABC$.

Příklad 4. Nechť ABC je trojúhelník a h_a, h_b výšky z vrcholů A a B. Ukažte, že pokud $a \geq b$, pak

$$a + h_a \geq b + h_b.$$

Příklad 5. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že

$$2\sqrt{s(s-a)} \leq 2m_a \leq b + c,$$

kde m_a je těžnice z vrcholu A.

Příklad 6. (Steiner-Lehmus theorem) Dokažte, že pokud jsou dvě osy úhlů stejně dlouhé, pak už je trojúhelník nutně rovnoramenný.

Příklad 7. Mějme trojúhelník ABC se středem kružnice vepsané I. Označme A_1 průsečík osy úhlu CAB se stranou BC a dále D bod středově souměrný s I podle středu A_1. Dokažte, že body A, B, C a D leží na jedné kružnici, právě když $b + c = 2a$.

Příklad 8. V ostroúhlém trojúhelníku ABC se středem I kružnice vepsané označme P patu výšky na stranu BC a M střed strany BC. Přímka MI protne výšku AP v bodě F. Ukažte, že $|AF| = r$.

Příklad 9. Je dán trojúhelník ABC se středem I kružnice vepsané. Označme D průsečík osy úhlu $\sphericalangle BAC$ se stranou BC a I_a střed kružnice připsané straně BC. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{|AI|} + \frac{1}{|II_a|} = \frac{2}{|AD|}.$$

(MO A-59-II)

Příklad 10. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC se středem I kružnice vepsané. Ukažte, že alespoň jedna z úseček AB, AI, BI, CI má neceločíselnou délku. (USAMO 2010)

Příklad 11. V trojúhelníku ABC, jehož vnitřní úhly splňují $\alpha > \gamma$, označme I střed kružnice vepsané, M střed strany AC a N střed oblouku AC kružnice opsané (toho, jenž obsahuje B). Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$. (KMS, gama)

Příklad 12. V trojúhelníku ABC je M střed strany BC. Kružnice vepsaná se středem I se dotýká strany BC v bodě D, střed úsečky AD označme S. Dokažte, že body S, I, M leží na jedné přímce.

Příklad 13. V trojúhelníku ABC je O střed kružnice opsané, AD její průměr. Tečna ke kružnici opsané vedená bodem D protne přímky AB, AC po řadě v bodech M, N a AD protne BC v bodě P. Dokažte, že je-li $|AP| = 2|BP|$, leží body O, B, C, M a N na jedné kružnici.

Příklad 14. Nechť ABC je trojúhelník a I_a střed kružnice připsané straně BC. Označme po řadě E a F průsečíky os úhlů ABC a BCA se stranami AC a AB. Dokažte, že $EF \perp OI_a$.

Příklad 15. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Paty výšek na strany AC a AB označme po řadě B_1, C_1. Dále označme P, Q průsečíky kolmic vedených z bodů C_1, B_1 na stranu BC. Dokažte, že průsečík přímek PB_1 a QC_1 leží na výšce na stranu BC. (China TST 1996)

Poděkování a zdroje

Na závěr bych chtěla poděkovat Michalu Rolínkovi za spolupráci a poskytnutí materiálů. Zdroj: *http://www.mathlinks.ro/*.