Dělení do skupinek

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek shrnuje úlohy, v jejichž řešení se někde využije myšlenka bijekce, potažmo dělení do skupinek. Úlohy jsou řazeny víceméně podle obtížnosti.

Úvod

Typická kombinatorická úloha se nás ptá, kolik prvků z nějaké množiny má požadovanou vlastnost. Zpravidla bývá snadné určit počet všech prvků množiny (řekněme N). Když se nám potom podaří celou množinu rozdělit do stejně velkých skupinek (řekněme, že jich bude třeba k), z nichž v každé je právě jeden prvek s požadovanou vlastností, máme vyhráno. Hledané číslo je totiž určitě N/k. Tuto myšlenku hned demonstrujme na velmi snadném příkladu.

Příklad 1. Do tanečních chodí 30 spolužáků. Když se tancovala polka, nikdo nezůstal na ocet. Kolik je v tanečních chlapců?

Řešení. Druhá věta nám vlastně říká, že umíme chlapce a děvčata popárovat (jeden chlapec, jedno děvče) tak, že nikdo nezbyde. Chlapců a děvčat tedy musí být stejně, a to konkrétně polovina z 30 neboli 15.

Naše úvaha se může zdát triviální až trapná, budeme ji ale rozvíjet na dalších úlohách, které už tak snadné nebudou. Postupme tedy v obtížnosti o malý krůček výše.

Příklad 2. Uvažujme množinu $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Vyberme z ní nějakých 10 prvků (ne nutně různých) a ty sečtěme. Vyjde nám součet častěji větší, nebo menší než 500?

Příklad 3. Na kružnici je dáno 2009 bodů. Zvolíme náhodně dva body a spojíme je úsečkou. Ze zbylých 2007 bodů opět vybereme dva a spojíme je. Jaká je pravděpodobnost, že se budou námi nakreslené úsečky protínat? Co kdybychom vybrali ze zbytku ještě jednu dvojici? Jaká by byla potom pravděpodobnost, že se některé dvě úsečky protnou?

Příklad 4. Zjistěte, kolik je tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$, které mají součin svých prvků větší než 2009.

Je několik věcí, na které si při tomto typu řešení musíme dávat pozor.

(i) Všechny skupinky musí být stejně velké.
(ii) Každý prvek musí připadnout do nějaké skupinky.

Klíčová slova. kombinatorika, pravděpodobnost, bijekce

(iii) Žádný prvek nesmí připadnout do více skupinek.

Občas náš postup může být poněkud trikový. Viz následující dvě úlohy

Příklad 5. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že vztah

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2009$$

je splněn pro právě 100 různých reálných čísel x.

Příklad 6. Na kružnici náhodně zvolíme 2009 bodů. Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že libovolný trojúhelník na těchto 2009 vrcholech je tupoúhlý.

No a nyní už nám nezbývá než se podívat na opravdu těžké úlohy. Potěšit vás ale může, že jejich obtížnost spočívá především v tom, že se jen velmi těžko řeší jinak. Pomocí metod a fint, které jsme právě natrénovali, je zvládneme levou zadní :-).

Příklad 7. Mějme tabulku velikosti $a \times b$, kde a, b jsou nesoudělná. Levý dolní roh tabulky si označme C, pravý horní roh D a pravý dolní roh E. Po hranicích dílků tabulky se nyní můžeme pohybovat, avšak jen nahoru nebo doprava. Kolik je cest z C do D, které nikdy nevstoupí dovnitř trojúhelníku CDE?

Příklad 8. Nechť n a k jsou kladná celá čísla, kde $k \geq n$ a $k-n$ je sudé. Je dáno $2n$ lamp označených čísly $1, 2, \ldots, 2n$, přičemž každá z nich může být *zapnutá* či *vypnutá*. Na počátku jsou všechny lampy vypnuté. Uvažujme posloupnost *kroků*: v každém kroku jednu z lamp přepneme (vypnutou zapneme, zapnutou vypneme).

Označme N počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n+1$ až $2n$ jsou vypnuté.

Označme M počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n+1$ až $2n$ jsou vypnuté, přičemž žádná z lamp $n+1$ až $2n$ nebyla nikdy zapnutá.

Určete podíl N/M.

Literatura

Úlohy jsem čerpal ze starších ročníků PraSátka, z různých úrovní matematické olympiády a z vlastní hlavy.