Dartboard Arrangements

Mirka Sotáková

Predstavme si obyčajný terč na šípky. Hoci všetky polia na ňom (s výnimkou 25 a 50) sú rovnaké, je logické, že by malo byť ťažšie trafiť polia s väčšou hodnotou. Čo keby sme teda usporiadali čísla tak, aby s „veľkými“ susedili čo najmenšie. Potom pri pokuse trafiť 20, by sme ľahko mohli trafiť 1, čím by sa pokus stal riskantnejším a za vysokú hodnotu úspešného pokusu by sme zaplatili vysokou penalizáciou v prípade neúspechu. Aj takéto úvahy mohli viesť k nasledujúcej úlohe:

Úloha. Buď $\mathcal{A}$ množina všetkých permutácii množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $p \in \mathbb{N}$. Označme

$$D_p(A) = \sum_{j=1}^{n} |i_j - i_{j+1})|^p,$$

kde $A = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathcal{A}$ a $i_{n+1} = i_1$. Nájdime $A_{\max} \in \mathcal{A}$ také, že hodnota $D_p(A_{\max})$ je maximálna možná.

Nazvime permutáciu $B \in \mathcal{A}$ ekvivalentnou s $A \in \mathcal{A}$, $A = (i_1 i_2 \ldots i_n)$ ak $B = i_q i_{q+1} \ldots i_n i_1 \ldots i_{q-1}$ pre nejaké q, $1 \leq q \leq n$, alebo $B = i_r i_{r-1} \ldots i_1 i_n \ldots i_{r+1}$ pre nejaké r, $1 \leq r \leq n$. (Zjavne súčet absolútnych hodnôt výrazov, ktoré sčítame nezáleží na poradí sčítania.) Ďalej pre $n = 2k$ nazvime čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$ „malé“ a čísla z množiny $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ „veľké“. Pre $n = 2k+1$ budú veľké čísla z množiny $\{k+2, \ldots, 2k+1\}$. Nech $(s_1, s_2 \ldots, s_k)$ resp. $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ je ľubovoľná permutácia malých, resp. veľkých čísel. Reťazec $(s_1 l_1 s_2 l_2 s_3 \ldots l_{k-1} s_k l_k)$ so striedavo sa vyskytujúcimi malými a veľkými číslami nazvime *alternujúci* (pre $n = 2k$). Pre $n = 2k+1$ bude *alternujúci* reťazec $(m s_1 l_1 \ldots l_{k-1} s_k l_k)$ kde $m = k+1$. Uvediem niektoré pozorovania, ktoré pri riešení tohto problému využijeme.

Lema. *Pre každú štvoricu reálnych čísel $a < b < c < d$, a ľubovoľné $p \geq 1$, platí*

$$(d-a)^p + (c-b)^p \geq (c-a)^p + (d-a)^p,$$

pričom rovnosť je možná iba v prípade $p = 1$.

Lema. *Pre $p \geq 1$ je $A_{\max}$ nutne alternujúca.*

Poznámka. Pre $p = 1$ je táto podmienka zároveň postačujúca.

Veta. *Pre $p \geq 1$ je riešením nasledujúca permutácie:*

$(1, 4k-1, 3, 4k-3, \ldots, 2k+3, 2k-1, 2k, 2k+2, 2k-2, \ldots, 4, 4k-2, 2, 4k), n = 4k,$

$(1, 4k+1, 3, 4k-1, \ldots, 2k+3, 2k+1, 2k+2, 2k, 2k+4, \ldots, 4, 4k-2, 2, 4k+2), n = 4k+2,$

$$(1, 2k, 3, 2k-2, \ldots, 4, 2k-1, 2, 2k+1), n = 2k+1.$$

Navyše pre $p > 1$ je toto riešenie až na ekvivalenciu jediné.