Cyklické soustavy rovnic

Honza Krejčí

Abstrakt. V příspěvku jsou rozebrány základní metody řešení soustav rovnic aplikovatelné na cyklické soustavy. Příspěvek rovněž obsahuje řadu příkladů na procvičení těchto postupů.

Úvod

Na střední škole se často setkáte s řešením soustav rovnic, které se však ukazuje jako těžkopádné pro složitější příklady. Mimo tyto metody existují ještě další, jež jsou schopny soustavy rovnic řešit účinněji. V příspěvku si o některých z nich povíme. Budou to metoda extremálního prvku, odhadování pomocí nerovností, sčítání, odčítání nebo násobení rovnic a úprava na čtverec nebo součinový tvar.

Úmluva. Vzhledem k tomu, že soustavy jsou cyklické, tj. všechny rovnice lze dostat z první cyklickou záměnou proměnných, v příkladech bude vždy uvedena pouze jedna z rovnic. Není-li řečeno jinak, bude se jednat o soustavu tří rovnic o třech neznámých nad reálnými čísly.

Příklad 1. (Motivační) Řešte cyklickou soustavu rovnic $x^2 + y^2 = 2yz$.

Úprava na součet čtverců

Soustavu upravíme tak, abychom v ní dostali rovnost, ve které porovnáváme čtverce s nulou. Typicky na začátku rovnice vhodně sečteme nebo odečteme a poté podle vzorečků upravíme na čtverec. Někdy nám do vzorečku kousek výrazu chybí, a tak musíme do rovnice něco přidat.

Příklad 2. (Lehký) Řešte soustavu $x^2 + 1 = y$.

Příklad 3. (Lehký) Najděte všechna řešení soustavy $x^2 = yz$.

Příklad 4. (Těžší) Vyřešte cyklickou soustavu $x^4 + y^2 + 4 = 5yz$.

Úprava na součin

Další hezká možnost (podobná první) vychází z jednoduchého pozorování – pokud se má součin rovnat nule, musí být jeden z činitelů nula. Máme-li soustavu, ze které dostaneme „dobrou“ rovnici tohoto typu, může nám o řešení mnohé prozradit.

Příklad 5. (Lehký) Nalezněte všechna řešení soustavy $x^2 = y + z + 2$.

Příklad 6. (Těžší) Vyřešte $x + y^2 = y^3$.

Metoda extremálního prvku

Tento postup se hodí pro soustavy, jejichž řešením jsou n-tice stejných čísel. Je postavený na tom, že pro každou konečnou množinu můžeme najít největší a nejmenší prvek. Ze soustavy ukážeme, že největší a nejmenší prvek se rovnají, a tudíž se musejí rovnat všechny neznámé.

Příklad 7. (Lehký) V oboru nezáporných reálných čísel řešte pro proměnné a, b, c, d a e soustavu $a + b = c^2$.

Příklad 8. (Těžší) Nalezněte všechna řešení soustavy $\sqrt{x^2 - y} = z - 1$.

Příklad 9. (Těžší) Vyřešte $(x + y)^3 = z$.

Nerovnosti

V matematice existuje mnoho pěkných nerovností, kterými lze odhadovat výrazy. Mezi nejčastěji používané nerovnosti patří Cauchy-Schwarzova nebo AG nerovnost. Často přes odhady nalezneme omezující podmínku pro řešení (typicky tu, že v dané nerovnosti musí nastat rovnost).

Příklad 10. (Lehký) Najděte všechna x, y, z splňující soustavu $x^2 = yz$.

Příklad 11. (Těžší) Řešte pro x, y, z kladné:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ xyz &= 8 \end{aligned}$$

Příklad 12. (Těžší) Nalezněte všechna řešení soustavy $x^4 + y^2 + 4 = 5yz$.

Cvičení

Příklad 13. $x^2 + y^2 = z$

Příklad 14. $x^2 + 1 = 2y$

Příklad 15. Pro kladné x, y, z řešte $x + \dfrac{1}{y} = 2$.

Příklad 16. Pro k reálné vyřešte $2x + y + 3z = k$.

Příklad 17. $x = y^3 + 1$

Příklad 18. Pro reálné proměnné a, b, c, d řešte $a^3 + b = c$.

Příklad 19. Určete všechny kladné n-tice čísel splňující soustavu:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \cdots + \frac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2$$

Příklad 20. Pro x, y reálné řešte $x + y^2 = y^3$.

Příklad 21. $(x^2 - 6x + 13)y = 20$

Příklad 22. Nalezněte minimum výrazu pro a, b, c celá a větší než 1:

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{NSN(a,b) + NSN(b,c) + NSN(a,c)}{a+b+c}$$

Literatura a zdroje

[1] Jaroslav Švrček: *Metody řešení soustav rovnic*
[2] Vít Musil: *Cyklické soustavy rovnic*
[3] Jaroslav Hančl: *Soustavy rovnic*
[4] Jan Vaňhara: *Soustavy rovnic*