Cyklické soustavy rovnic

VÍT „VEJTEK“ MUSIL

ABSTRAKT. Příspěvek se věnuje vybraným partiím ze soustav nelineárních rovnic – cyklickým soustavám a metodám jejich řešení. Součástí příspěvku je sada cvičení s návody.

Běžné středoškolské postupy při řešení soustav často selhávají pro soustavy rovnic nelineárních. Přesto existuje několik metod, které fungují na celou řadu cyklických soustav. Připomeňme si, že soustavu rovnic v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazveme *cyklickou*, pokud při tzv. cyklické záměně $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \dots, x_n \to x_1$ dostaneme tutéž soustavu.

Pro cyklickou soustavu tedy triviálně platí, že pokud je $[t_1, \dots, t_n]$ jejím řešením, pak každá cyklická záměna je rovněž řešením.

Začněme příkladem, na kterém si ukážeme hned několik metod.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x = \frac{4y^2}{1+4y^2}.$$

Poznámka. Pro úsporu většinou nebudeme psát všechny rovnice, stačí nám znát první a počet proměnných. Všechny ostatní získáme cyklickou záměnou proměnných, které doplňujeme buď podle abecedy nebo s rostoucími indexy.

Řešení. (Sečti a učtvercuj) Všimněme si, že zlomky na pravé straně nabývají pouze hodnot z intervalu $\langle 0, 1)$, řešení tedy hledáme právě v tomto oboru. Sečtením všech tří rovnic dostáváme

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} + \frac{4y^2}{1+4y^2} + \frac{4z^2}{1+4z^2} = x + y + z.$$

Převedením na jednu stranu a úpravou dostáváme

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2} + \frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2} + \frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2} = 0.$$

Na levé straně máme součet tří nezáporných čísel a vpravo nulu. Rovnost nastává tehdy a jen tehdy, jsou-li všechny sčítance nulové. Pro x máme dvě možnosti, buď

$x = 0$, nebo $x = 1/2$. Dosazením do třetí rovnice spočítáme hodnotu y a následně z druhé dostaneme z. Celkem máme právě dvě řešení $[x, y, z] = [0, 0, 0]$ a $[x, y, z] = [1/2, 1/2, 1/2]$.

Řešení. (Uspořádej – poprvé) Označme si $f(x) = 4x^2/(1 + 4x^2)$. Pak f lze upravit do tvaru

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4x^2}},$$

odkud je snadno vidět, že f je na intervalu $\langle 0, 1)$ rostoucí. Máme dvě možnosti:

(1) $x \geq y$. Potom $f(x) \geq f(y)$, což je totéž jako $z \geq x$. Opět aplikujeme f a máme $f(z) \geq f(x)$, neboli $y \geq z$. Celkem $x \geq y \geq z \geq x$.
(2) $x \leq y$. Postupujeme stejně a dokážeme $x \leq y \leq z \leq x$.

Musí tedy platit $x = y = z$, což redukuje soustavu na jednu kvadratickou rovnici, kterou snadno vyřešíme.

Řešení. (Uspořádej – podruhé) Buď f jako výše. Snadno se ukáže, že $f(x) \leq x$. Potom aplikací této nerovnosti na všechny neznámé obdržíme

$$x \geq f(x) = z \geq f(z) = y \geq f(y) = x$$

a nutně $x = y = z$. Dopočet je nasnadě.

Řešení. (Substituce) Nahraďme $x = \tan(\alpha)/2$, $y = \tan(\beta)/2$ a $y = \tan(\gamma)/2$ pro $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi/2)$. Dosadíme do zadaných rovnic a všechny vynásobíme. Pomocí goniometrických vzorců upravíme do tvaru

$$\tan\alpha \tan\beta \tan\gamma\big(1 - \sin(2\alpha)\sin(2\beta)\sin(2\gamma)\big) = 0,$$

odkud buď některé z čísel α, β nebo γ je rovno nule (tomu odpovídá řešení $x = y = z = 0$), nebo jsou všechna rovna $\pi/4$ (čemuž odpovídá řešení $x = y = z = 1/2$).

Vyřešme si ještě další příklad, kde místo součtů budeme sledovat rozdíl.

Příklad. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

(MO 57–A–III–1)

Řešení. (Odečti a rozlož) Odečtěme od sebe obě rovnice

$$(x^3 - y^3) - (x^2 - y^2) + (x - y) = 0,$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0.$$

Druhou závorku můžeme dále upravit

$$x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2.$$

Všechny čtverce nemohou být současně nulové, a proto je druhá závorka kladná. Musí tedy být $x = y$ a soustava degeneruje na jednu rovnici, kterou snadno vyřešíme.

Řešení. (Vyjádři a umlať) Z druhé rovnice vyjádříme $y = x^3 - x^2$ a dosadíme do první. Dostaneme rovnici devátého stupně

$$x^9 - 3x^8 + 3x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - x = 0.$$

Položíme-li $x = y$, přejde původní soustava v jedinou rovnici $x^3 - x^3 - x = 0$, a proto polynom na levé straně musí být dělitelný polynomem $x^3 - x^2 - x$. Vydělením přejdeme k rovnici

$$\left(x^3 - x^2 - x\right)\left(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1\right) = 0,$$

jejíž druhá závorka je vždy kladná, neboť ji lze napsat ve tvaru

$$\left(x^3 - x^2\right)^2 + \left(x^2 - x\right)^2 + \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}.$$

K dokončení tedy stačí dopočíst příslušné kořeny rovnice $x^3 - x^2 - x = 0$.

Řešení. (Uspořádej) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x > y$. Definujme $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Pak f lze psát jako $f(x) = x(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1 je záporný kořen a x_2 kladný (kreslete si). Máme

$$x > y = x^3 - x^2, \quad \text{tj.} \quad 0 > f(x)$$

a stejně

$$y < x = y^3 - y^2, \quad \text{tj.} \quad 0 < f(y).$$

Musí tedy být $x \in (-\infty, x_1) \cup (0, x_2)$ a $y \in (x_1, 0) \cup (x_2, \infty)$, což se vzhledem k předpokladu $x > y$ redukuje na

$$x \in (0, x_2), \quad y \in (x_1, 0).$$

To však není možné, neboť pro toto záporné y je i $x = y^3 - y^2$ záporné.

Pozastavme se nyní u jednotlivých metod trochu podrobněji.

„Sečti a učtvercuj“

Nadpis jasně říká, co chceme s úlohou dělat. Základem je naučit se vidět, ze kterých členů půjdou vyrobit čtverce. Znát vzorečky pro druhou mocninu dvojčlenu a trojčlenu je nutností. Ne vždy máme hned po sečtení ve hře všechny potřebné členy, občas je potřeba si chytře nějaké přidat.

Tato metoda se hodí většinou na rovnice, ve kterých se vyskytují sudé mocniny a „sudé“ součiny (např. Nxy).

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz.$$

Návod. Než budeme sčítat, upravme rovnice do tvaru

$$(x^4 - 4x^2 + 4) + 4x^2 + y^2 = 5yz.$$

Po sečtení všech rovnic dostáváme

$$\sum_{\text{cycl.}} (x^2 - 2)^2 + \frac{5}{2} \sum_{\text{cycl.}} (x - y)^2 = 0.$$

Druhá suma čtverců říká, že $x = y = z$, první pak, že jejich hodnota je $\pm\sqrt{2}$.

„Odečti a rozlož“

Odečítat budeme dvojice rovnic tak, abychom se některých proměnných zbavili. Typicky odečítáme rovnici od jí následující a dostáváme rovnici pro pouze dvě neznámé. Vše převedeme na jednu stranu a hledáme výhodný rozklad na součin. Převážně vytýkáme rozdíly $x - y$ apod. Následně diskutujeme několik možností.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných

$$x^2 + 2yz = x.$$

Návod. Sečtením všech rovnic dostáváme

$$(x + y + z)^2 = x + y + z,$$

odkud součet $x + y + z$ je roven nule nebo jedné. Odečtením druhé rovnice od první získáme

$$(x - y)(x + y - 2z - 1) = 0.$$

Nyní již stačí probrat několik možností.

„Uspořádej“

Uspořádání proměnných jde použít pro soustavy rovnic o dvou proměnných nebo soustavy nejvýše tří rovnic pro tři neznámé. Na větší soustavy obecně použít nejde, neboť pro větší množství proměnných existuje velmi mnoho možných uspořádání.

Tento princip se hodí převážně pro soustavy, pro jejichž řešení platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Že každá cyklická soustava takové řešení mít nemusí, je vidět z příkladu 26 ve cvičení.

Většinu „uspořádatelných“ soustav porazíme pomocí jednoho z následujících dvou lemmat.

Lemma 1. *Buďte $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funkce rostoucí na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Potom pro řešení soustavy*

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Lemma 2. *Buďte $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a h funkce neklesající na intervalu I. Nechť funkce $F\colon I \times I \to \mathbb{R}$ splňuje pro každé $z \in I$*

$$x \le y \to F(x, z) \le F(y, z),$$
$$x \le y \to F(z, x) \le F(z, y).$$

Potom pro řešení soustavy

$$\begin{cases} F(x, y) = h(z) \\ F(y, z) = h(x) \\ F(z, x) = h(y) \end{cases}$$

platí $h(x) = h(y) = h(z)$. Je-li navíc h rostoucí, je $x = y = z$.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu v reálných proměnných a až z

$$a^5 = b + b^5.$$

Návod. Položme $f(a) = a^5$ a $g(b) = b + b^5$ a použijeme Lemma 1.

Příklad. Řešte cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných

$$(x + y)^3 = z.$$

Návod. Položme $F(x, y) = (x + y)^3$ a $h(z) = z$. Aplikací Lemmatu 2 dostáváme, že $x = y = z$, a zbytek dopočítáme snadno.

Další tipy

- Mezi další metody patří v úvodu naznačená substituce. Nahrazujeme proměnné či výrazy takovými funkcemi, pro které se situace výrazně zjednoduší. Pro goniometrické funkce platí mnoho identit, které lze s výhodou používat a někdy mohou být dobrým vodítkem pro volbu substituce.
- Kromě sčítání a odečítání rovnic může být účelné i jejich znásobení. Předtím je však dobré si rozmyslet, který člen dát na kterou stranu rovnice.
- Dalším trikem je použití nerovností. Může se nám podařit ukázat, že rovnice platí, právě když nastává rovnost v nerovnosti.
- Při počítání se snažíme zachytit okamžik, kdy již lze všechno vypočítat, tj. vyjádřit a dosadit.
- Uhodnout řešení. Podle řešení jde často poznat metoda řešení.
- Nikdy nezapomínejme na zkoušku.

Cvičení

Nebude-li řečeno jinak, řešíme cyklickou soustavu ve třech reálných proměnných.

Příklad 1. $x^2 = xy$.

Příklad 2. $x + 6 = y^3$.

Příklad 3. $x^2 + 1 = 2y$.

Příklad 4. $x = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Příklad 5. $x^3 + 1 = 2y$.

Příklad 6. $x + 2y = \sqrt{6z - 1}$.

Příklad 7. $x(x + 1) = y(z + 1)$.

Příklad 8. $(x + y)^4 = z$.

Příklad 9. $x^2 - 3y + 4 = z$.

Příklad 10. $x^2 - 1 = y + z$.

Příklad 11. $x^3 = 2y^3 + y - 2$.

Příklad 12. $x\sqrt{y} - z = x$.

Příklad 13. $x^4 + 1 = 2yz$.

Příklad 14. $x^3 = y - x + 8$.

Příklad 15. $\sqrt{x^2 - y} = z - 1$.

Příklad 16. $x^5 = 5y^3 - 4z$.

Příklad 17. $x^2 + y + z = 2$.

Příklad 18. $e^x - e^{x-y} = z$, (x, y, z nezáporná).

Příklad 19. Řešte cyklickou soustavu v nezáporných reálných proměnných x_1 až x_{2013}

$$x_1 + \sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[4]{x_1} + \cdots + \sqrt[2013]{x_1} = x_2.$$

Příklad 20. $x^2 + y^2 + z = 2$.

Příklad 21. $z + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = y$.

Příklad 22. $2x^2 + 2xy + 1 = 4z$.

Příklad 23. $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2}$.

Příklad 24. $x + \arctan(x + 2y) = z - \frac{\pi}{3}$.

Příklad 25. $x^2 + x - 1 = y$.

Příklad 26. Ověřte, že cyklická soustava ve třech proměnných

$$\tfrac{1}{1-x} = y$$

má řešení $[x, y, z] = [2, -1, \frac{1}{2}]$. Ukažte dále, že tato soustava nemá řešení, pro které by platilo $x = y = z$.

Příklad 27. Řešte cyklickou soustavu v pěti reálných proměnných $x_1^2 = x_2 + x_3$.

Příklad 28. Dokažte první lemma.

Příklad 29. Dokažte druhé lemma.

Návody

1. Sečtěte, upravte na $\sum(x-y)^2 = 0$, řešení $[t,t,t]$, $t \in \mathbb{R}$. **2.** Lemma 1, řešení $x = y = z = 2$. **3.** Sečtěte, upravte na $\sum(x-1)^2 = 0$, řešení $x = y = z = 1$. **4.** Odečtěte a rozložte na $(x-y)(1-\frac{1}{xy}) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = \pm\sqrt{2}$. **5.** Lemma 1, tři řešení. **6.** Lemma 2, řešení $x = y = z = \frac{1}{3}$. **7.** Sečtěte, upravte na $\sum(x-y)^2 = 0$, řešení $[t,t,t]$, $t \in \mathbb{R}$. **8.** $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$, Lemma 2 na $F(x,y) = (x+y)^4$, řešení $x = y = z = 0$ nebo $16^{-1/3}$. **9.** Sečtěte, upravte na $\sum(x-2)^2 = 0$, řešení $x = y = z = 2$. **10.** Odečtěte a rozložte na $(x-y)(x+y+1) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = 1 \pm 2$, nebo $[0,0,-1]$ a cykl. záměny. **11.** Lemma 1, řešení $x = y = z = 1$. **12.** Lemma 2 pro $F(x,y) = x(\sqrt{y}-1)$, řešení $x = y = z = 0$ nebo 4. **13.** Sečtěte a upravte na $\sum(x^2-1)^2 + \sum(x-y)^2 = 0$, řešení $x = y = z = \pm 1$. **14.** Lemma 1 pro $f(x) = x^3 + x$, řešení $x = y = z = 2$. **15.** $x, y, z \in \langle 1, \infty)$, Lemma

2 pro $F(x,y) = x + (y-1)^2$, $h(z) = z^2$. Řešení $x = y = z = 1$. **16.** Lemma 2, řešení $[t,t,t]$ pro $t \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. **17.** Odečtěte a rozložte na $(x-y)(x+y-1) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = -1 \pm \sqrt{3}$, nebo $[1,1,0]$, $[-1,-1,2]$ a cykl. záměny. **18.** Lemma 2 pro $F(x,y) = e^x(1-e^{-y})$, řešení $x = y = z = 0$. **19.** Lemma 1, řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2013} = 0$. **20.** Odečtěte a rozložte na $(x-z)(x+z-1) = 0$, diskutujte možnosti. Řešení $x = y = z = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$, nebo $[1,1,0]$, $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ a cykl. záměny. **21.** Lemma 2, řešení $x = y = z = 0$. **22.** Sečtěte a upravte na $\sum(x+y-1)^2 = 0$, řešení $x = y = z = \frac{1}{2}$. **23.** $2 \le z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}$, a proto $x, y, z \in (0, 1\rangle$. Použijte Lemma 1 na tomto intervalu, řešení $x = y = z = 1$. **24.** Lemma 2 pro $F(x,y) = x + \arctan(x+2y) - \frac{\pi}{3}$. Řešení $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **25.** Sečtení dává $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, znásobení ve tvaru $x(x+1) = y+1$ dává $(xyz-1)(x+1)(y+1)(z+1) = 0$. Diskutujte možnosti a využijte AG nerovnost. Řešení $x = y = z = \pm 1$. **27.** Ukažte, že $x_1 = x_2 = \cdots = x_5$. Pro spor BÚNO předpokládejte, že x_1^2 je maximální z levých stran, odtud ukažte, že x_1 musí být záporné a $x_5^2 < 0$. Řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 0$ nebo 2. **28.** Předpokládejte, že $x_1 \ge x_2$, pak $f(x_1) \ge f(x_2)$, což jest $g(x_2) \ge g(x_3)$ a $x_2 \ge x_3$. Po n krocích máme $x_n \ge x_1$. Stejně pro $x_1 \le x_2$. **29.** BÚNO x je maximální. Probereme dvě možná uspořádání. Buďte $x \ge y \ge z$. Máme $F(x,y) = h(z) \le h(x) = F(y,z) \le F(x,z) \le F(x,y)$ a $h(x) = h(y) = h(z)$. V případě $x \ge z \ge y$ postupujeme obdobně a zbytek snadno.

Literatura a zdroje

[1] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh I*, MU, Brno, 2001.

[2] Michal Rolínek, Josef Tkadlec, Seminář *Umění vidět v matematice.*

[3] Vít Musil, Soustavy rovnic, Sborník Blansko–Obůrka, jaro 2011.