Cvičení z diofantických rovnic

Honzík Vaňhara

Abstrakt. Toto cvičení slouží k získání hlubší zkušenosti s řešením diofantických rovnic.

Rozumíte si s Diofantickými rovnicemi? Ne? Tak je na čase si s nimi začít rozumět a ostřílet si své zbraně. Zkuste to třeba na této:

Příklad 1. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x^2 + 7 = 2^y.$$

U diofantických rovnic se při řešení využívá hlavně dělitelnosti a zbytků po dělení nějakým prvočíslem. Dělitelnost je třeba vhodné aplikovat, když na jedné straně rovnice máte výraz dělitelný nějakým prvočíslem, protože potom musí být i druhá strana tímto prvočíslem dělitelná a potom si celý tento výraz můžete vydělit, což může být pro další část řešení klíčové. Zbytky po dělení prvočíslem se také používají na eliminaci řešení, tedy na dokázání, že už žádná další řešení nejsou. Všimli jste si už, že například 2^k dává po dělení třemi zbytek 1, pokud je k sudé, a 2, pokud je k liché, anebo že prostá druhá mocnina přirozeného čísla dává po dělení třemi nebo čtyřmi zbytky pouze 1 a 0? Při řešení také nezapomínejte na obvyklé finty jako je používání známých vzorečků, nerovností nebo, jak si ukážeme hned na prvním příkladě, i zajímavých vlastností některých čísel.

Příklad 2. F_n je n-té Fibonacciho číslo ($F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Najděte všechny dvojice $a, n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$F_n + F_{2n} + F_{3n} = a! + 3.$$

Příklady k vašemu řešení

Příklad 3. Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $n^2 + n + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Příklad 4. Najděte všechny trojice $x, y, z \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x + y + z = xyz.$$

Příklad 5. Následující rovnici vyřešte v oboru přirozených čísel:

$$3m^2 + 3m + 7 = n^3.$$

Klíčová slova. teorie čísel, diofantické rovnice, přirozená čísla, spousta příkladů

Příklad 6. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2.$$

Příklad 7. Nalezněte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že číslo $a + b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + ax + b$. (Kraj MO 2007)

Příklad 8. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x! + y! = x^y.$$

(MEMO 2007)

Příklad 9. Vyřešte v přirozených číslech diofantickou rovnici

$$a!b^2 = c^3 - 1.$$

Příklad 10. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(IMO 2006)

Příklad 11. Nalezněte celočíselná řešení rovnice

$$4x^2 + 9 = y^3.$$

Příklad 12. Následující rovnici vyřešte v oboru přirozených čísel:

$$13x + 3 = 2^y.$$

Příklad 13. Najděte všechny dvojice čísel x a p, kde $x \in \mathbb{N}$ a p je prvočíslo takové, že

$$2^{p-1} - 1 = px^2.$$

Příklad 14. Zjistěte všechny trojice čísel $x, y \in \mathbb{N}$ a p prvočíslo takové, že

$$y^2 + 1 = x^p.$$

Literatura

[1] Fórum Mathlinks, *http://www.mathlinks.ro/*.
[2] Víťa Kala, *Diofantické rovnice*, Bernartice, 2005.