Conwayova čísla

Pavel Kraemer

V Geometrii připouštíme nejen nekonečné veličiny, to jest veličiny větší než jakákoliv určitá veličina, ale i nekonečné veličiny, z nichž jedna je nekonečněkrát větší než druhá. To udivuje náš mozek, který i u největších hlav měří jen šest palců na délku, pět na šířku a šest na výšku.

Voltaire, heslo Nekonečno ve Filosofickém slovníku

Jak vznikla čísla

Na počátku nebylo nic. Nalevo nic, napravo nic. A tak vzniklo první číslo. První číslo bylo nic, neboli nula. To vše se událo ještě před stvořením světa, v nultý den stvoření.

A pak nastalo stvoření. Stvoření světa je tvoření čísel. Všechno je číslo, říká Pythagoras. Vše, co je pod sluncem, má svou světlou i stinnou stránku. Nejinak je tomu s čísly. Každé číslo má svou světlou, to jest pravou (Pravda je Světlo, jak praví Védy) stranu a svou levou stranu.

Čísla se rychle vytrácejí z paměti. A proto si je budeme zapisovat. Aby nám neutekly, uzavřeme si každé číslo do hranatých závorek (hranaté proto, aby až bude číslo chtít utíkat, si to radši rozmyslelo, protože by se bálo, že se napíchne). Do závorky napíšeme nalevo levou stranu, napravo pravou stranu a doprostřed svislou čáru na znamení toho, že nalevo není napravo a napravo není nalevo. Takže nula, matka všech čísel, vypadá asi takto: [|]. Možná se ptáte, proč není baculatá, když má tolik dětí. Asi taková kdysi byla, teď je však už stará, kostnatá a hubená, vždyť je jí více než ω[†] let !

Nastal první den stvoření. A co se nestalo! Mezi nulou a ničím[‡] nám vyrostlo nové číslo: [0|]. (Nulu teď píšeme tak, jak vypadala za mlada. Je to slušnost a stalo se to zvykem.) Protože bylo jen jedno a protože je stejně jedno, jak se co jmenuje, začali mu říkat jedna: 1=[0|]. A aby mu nebylo smutno, týž den se narodilo další číslo, tentokráte nalevo od nuly. A nazvali ho mínus jedna: -1=[|0].

Druhý den se napravo od nuly, někde mezi jedničkou a ničím narodilo další číslo. A protože bylo jen jedno a s menšíma se nekamarádilo, nazvalo se dva, aby mu nebylo smutno: 2=[1|]. Bylo to tak trochu zbytečné, neboť ješte týž den se mu narodil bratr, který mu byl, pravda jen v absolutní hodnotě, roven: -2=[−1|]. Každý den bylo třeba zaplnit všechny mezery,

[†] Volně řečeno, ω označuje nekonečnou spočetnou množinu. Pracujeme s ním, jako by to bylo obyčejné číslo, asi jako v analýze ∞.

[‡] Pozor! Neplést si nulu a nic. Není pravda, že nula není nic. Nula *je* nic. Stejně tak není pravda, že nic je nic. Nic ve skutečnosti vůbec nic není.

které vznikly předcházejícího dne. Druhý den zbývala ještě mezera mezi nulou a jedničkou. Ale ta mezera byla tak úzká, že se do ní žádné číslo nevešlo celé. A tak se ho tam narodila jenom jedna polovina: $\frac{1}{2} = [0|1]$. A i tomu se narodil bratr: $-\frac{1}{2} = [1|0]$.

0. den		$0=[\ \ \|\ \ ]$		
1. den	$-1=[\ \ \|0]$		$1=[0\|\ \ ]$	
2. den	$-2=[\ \ \|-1]$	$-1/2 = [-1\|0]$	$1/2 = [0\|1]$	$2=[1\|\ \ ]$

Nastal třetí, čtvrtý, pátý den. Množství čísel vůčihledě rostlo. Stalo se však něco divného. Jedna čtvrtina přišla na svět už třetí den, ačkoli ji očekávali až nazítří. A jedna třetina, kterou všichni dychtivě očekávali, se ten den naopak vůbec nenarodila. Čtvrtý den také ne. Pátý také ne. Jedna třetina se ne a ne narodit. Zato se nám rodí osminy, šestnáctiny atd. Později uvidíme, že se každý nový den rodí právě tyto čísla :

1. Čísla o jedno větší, resp. menší než největší resp. nejmenší číslo z předcházejícího dne. To znamená, že čísla n, $-n$ vzniknou n-tý den.
2. V mezeře mezi dvěma následujícími čísly se další den narodí jejich aritmetický průměr. Z čehož indukcí plyne, že za konečný počet dní dostaneme pouze dyadická čísla, tj. zlomky se jmenovatelem, jenž je mocninou dvojky.

Na objevení se jedné třetiny bylo třeba čekat celých ω dní. Den ω byl vůbec velmi zajímavý. Co se ten den všechno nenarodilo! Přišla na svět nejen všechna racionální čísla, ale i všechna čísla reálná. Zdá se, že jsme byli za dlouhé čekání bohatě odměněni. A jako by toho všeho ještě nebylo dost! Týž den vznikají další čísla. A věru podivná čísla! Například dostaneme celou kupu čísel, která jsou na jedné straně větší než nula a na druhé straně menší než všechna kladná reálná čísla.

Mluvit o těchto číslech bylo až do velmi nedávné doby v každé spořádané matematické obci, která aspoň trochu dbala na svou dobrou pověst, přísně zakázáno.[†] A tak někteří staří pamětníci, místo toho, aby jen nostalgicky vzpomínali na dobu Leibnitzovu a Eulerovu, kdy každý, kdo byl od řemesla, mohl volně a naprosto beztrestně mluvit a počítat s infinitesimálními (nekonečně malými) veličinami jako by se nechumelilo[‡], místo nečinného vzpomínání se dali do práce a vymysleli novou teorii infinitesimálních veličin, která byla dostatečně komplikovaná a nesrozumitelná na to, aby mohla být uznána za exaktní. Asi tomu vydatně napomohlo i to, že celá ta Robinsonova[⋆] teorie stojí a padá na axiómu výběru (axióm vý-

[†]Podvědomě se tím těmto číslům vlastně hluboce klaněli, neboť kdo je Ten, jehož jméno nesmí žádný smrtelník vyslovit?

[‡]Už tehdy ale existovali lidé, většinou nematematici, kterým se nelíbily. Například biskup Berkeley, který se mimo jiné proslavil teorií, že neexistuje nic kromě jeho mysli, napsal proti nim polemický spis. Bál se nekonečně malých veličin jako čert kříže, říkal jim "the ghosts of departed quantities," což znamená něco jako duchové zmizelých veličin.

[⋆]Abraham Robinson byl, jak už jeho jméno napovídá, otec tzv. nestandartní analýsy, která vznikla v šedesátých letech

běru zhruba říká, že existují jisté množiny, které nelze definovat). Jeho hojné užívání patří dneska v matematice k bontónu. Rozumnou a konstruktivní teorii infinitesimálních veličin vymyslel až J.H. Conway v sedmdesátých letech. A to je to, o čem se tu už notnou chvíli snažíme mluvit. Takže začneme ještě jednou od začátku, ale trochu exaktněji a obecněji.

Konstrukce čísel : *Jsou-li L, R libovolné dvě množiny čísel, a každé číslo z L je ostře menší než každé číslo z P, pak $[L|P]$ je také číslo.*
Konvence : *Členy z L budeme psát jako x^L, členy z P jako x^P, neboli $x = [x^L|x^P]$.*
Uspořádání : *$x \geq y$ platí právě tehdy když všechna $x^R > y$ a $x >$ všechna y^L. $x < y$ přitom znamená, že neplatí $x \geq y$.*
Rovnost : *$x = y$, když $x \geq y$ a zároveň $y \geq x$.*
Sčítání : *$x + y = [x^L + y,\ x + y^L|x^R + y,\ x + y^R]$, kde ty součty, v nichž se jako x^L nebo y^P vyskytuje nula, se nepočítají.*
Mínus : $-x = [-x^R| - x^L]$
Násobení : $xy = [x^Ly+xy^L-x^Ly^L,\ x^Ry+xy^R-x^Ry^R|x^Ly+xy^R-x^Ly^R,\ x^Ry+xy^L-x^Ry^L]$

Je poměrně snadné, i když dosti pracné, dokázat základní vlastnosti rovnosti, nerovnosti, sčítání a násobení. Trošku těžší je např. dokázat, že součin dvou kladných čísel je kladné nebo že ke každému nenulovému číslu existuje inversní prvek vzhledem k násobení.

O tom, co se přesně stalo v den ω a jak rozeznat normální reálná čísla od nekonečně malých a jim podobných (což mimochodem není na první pohled vůbec jasné), o tom se dozvíte na přednášce. Také se dozvíte o tom, jak to všechno souvisí s teorií her.

Literatura :

J.H.Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, London, 1976
D.N.Knuth, *Surreal Numbers*, Addison–Wessley, 1977 (přeloženo v Pokrocích ročník asi 77)