Ciferné součty

Lenka Slavíková

Úvod

V této přednášce se seznámíme s nejdůležitějšími vlastnostmi ciferných součtů a ukážeme si, jak jich využít při řešení konkrétních příkladů. Ačkoliv lze ciferný součet čísel počítat v soustavách o různých základech, my se omezíme výhradně na soustavu desítkovou.

Jak jistě víš, každé přirozené číslo n lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

kde k je nezáporné celé číslo, $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $a_k \neq 0$. Ciferným součtem čísla n budeme rozumět číslo $s(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$.

Tvrzení. *Nechť m, n jsou přirozená čísla. Pak platí*

(i) $s(n) = n - 9 \sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{10^k} \rfloor$,
(ii) $s(n) \equiv n \pmod 9$,
(iii) $s(m + n) \leq s(m) + s(n)$,
(iv) $s(mn) \leq s(m)s(n)$.

Příklad. (motivační, lehký) Dokažte, že mezi 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly můžeme vždy najít nějaké, jehož ciferný součet je dělitelný 11.

(Ruská MO 1961)

Různé metody používané při řešení příkladů

Využití poznatků z Tvrzení

Začneme jednoduchým příkladem na aplikaci nerovnosti (iii) (místo ní můžeš použít rovněž nerovnost (iv)).

Příklad 1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $s(2n) \leq 2s(n) \leq$ $\leq 10s(2n)$.

(MKS 2004)

Řešení. Platí $s(2n) = s(n + n) \leq s(n) + s(n) = 2s(n)$, z čehož plyne první z dvojice nerovností, které chceme dokázat. Nyní si uvědomíme, že $s(n) = s(10n)$, a podobně jako v předchozím případě dostáváme $s(n) = s(10n) = s(2n + 2n +$ $+ 2n + 2n + 2n) \leq 5s(2n)$.

Příklad 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $s(8n) \geq \frac{1}{8}s(n)$.

(Lotyšská MO 1995)

V následujících příkladech využijeme faktu, že ciferný součet libovolného přirozeného čísla dává po dělení 9 stejný zbytek jako číslo samé (vlastnost (ii) zmíněná výše).

Příklad 3. Existuje přirozené číslo n takové, že $s(2^n) = s(2^{n+1})$?

Příklad 4. Najděte všechny možné hodnoty ciferných součtů druhých mocnin přirozených čísel. (Domácí kolo MO 1993)

Další nerovnost pro ciferný součet

Pro ciferný součet přirozeného čísla n platí následující jednoduchá nerovnost:

$$s(n) \leq 9(\lfloor \log n \rfloor + 1)$$

(Výrazem $\log n$ budeme v celém tomto textu rozumět desítkový logaritmus čísla n.) Jelikož výraz na pravé straně není nic jiného než devítinásobek počtu cifer čísla n, celá nerovnost říká pouze to, že mezi všemi k-cifernými čísly má největší ciferný součet číslo $99\ldots99$. Díky známé vlastnosti logaritmu $\log a^b = b \log a$ je právě uvedená nerovnost často užitečná při řešení příkladů, v nichž se vyskytují ciferné součty mocnin přirozených čísel.

Příklad 5. Určete hodnotu výrazu $s(s(s(4444^{4444})))$. (IMO 1975)

Příklad 6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo N existuje přirozené číslo $n \geq N$ takové, že $s(3^n) \geq s(3^{n+1})$. (Ruská MO)

Vlastnosti čísel tvaru $10^k - 1$

Již jsme si všimli, že číslo

$$\underbrace{99\ldots99}_{k} = 10^k - 1$$

má největší ciferný součet mezi všemi k-cifernými čísly. Nyní se přesvědčíme, že stejný ciferný součet jako $10^k - 1$ má i poměrně velký počet násobků tohoto čísla.

Tvrzení. *Nechť k je přirozené číslo. Pak každý násobek čísla $10^k - 1$ má ciferný součet alespoň $9k$. Je-li navíc n přirozené číslo splňující $1 \leq n \leq 10^k$, platí dokonce $s(n(10^k - 1)) = 9k$.*

Následující příklad ukazuje, že vlastnost, kterou jsme si právě uvedli, je pro čísla tvaru $99\ldots99$ charakteristická.

Příklad 7. Dokažte, že přirozené číslo $n > 1$ je tvaru $10^k - 1$ pro nějaké k přirozené, právě když platí $s(n) = s(2n) = \cdots = s(n^2)$.

(Soutěž Józsefa Kürscháka 1989)

Ukažme si pár aplikací předchozího tvrzení:

Příklad 8. V závislosti na n přirozeném určete hodnotu výrazu

$$s(9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdots \underbrace{99\ldots99}_{2^n}).$$

(USAMO 1992)

Příklad 9. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n-ciferné přirozené číslo N, které je dělitelné svým ciferným součtem a jehož všechny cifry jsou nenulové. (IMO 1998 Shortlist)

Příklad 10. Nechť S je množina přirozených čísel, v jejichž desítkovém zápisu jsou pouze nuly a jedničky, přičemž jedniček je nejvýše 1988. Dokažte, že existuje přirozené číslo, které nedělí žádný prvek množiny S. (Turnaj měst 1988)

Příklad 11. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje nekonečná aritmetická posloupnost s diferencí nesoudělnou s 10 taková, že ciferný součet každého jejího členu je alespoň k. (IMO 1999 Shortlist)

Omezenost posloupností tvaru $s(a^n m)$

Tvrzení. *Nechť a, m jsou přirozená čísla. Pak posloupnost $s(a^n m)$ je omezená, právě když $a = 10^k$ pro nějaké nezáporné celé číslo k.*

Poslední příklad této přednášky je (možná trochu překvapivou) aplikací předchozího tvrzení.

Příklad 12. Nechť a, b jsou přirozená čísla taková, že $s(an) = s(bn)$ pro všechna přirozená čísla n. Dokažte, že $a/b = 10^k$ pro nějaké celé číslo k.

(Adrian Zahariuc, Gabriel Dospinescu)

Literatura a zdroje

[1] T. Andreescu, G. Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.

Dále jsem čerpala ze stránek *www.artofproblemsolving.com* a z archivu PraSátka.