Cèvova a Menelaova věta

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Abstrakt. Přednáška se zabývá pokročilejšími metodami řešení geometrických úloh s využitím poměrů. Důkladně si procvičíme Cèvovu a Menelaovu větu a ukážeme si, jak vypadá úloha, kde jdou použít.

Jak na poměry v geometrii

Jak vůbec poznat úlohu na poměry? Při řešení takových úloh budeme používat hlavně podobnost, mocnost bodu ke kružnici, sinovou větu, Cèvovou/Menelaovou větu. Při zapisování poměrů dbejte na přehlednost - při pohledu na poměr musíte vidět, co říká (např. na pojmenovani úhlů používejte zásadně řecká písmenka). O to větší si dávejte pozor při sepisování vyřešené úlohy.

Cevova věta

Věta. (Cèvova) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Příklad 1. Pomocí Cèvovy věty dokažte, že se těžnice protínají v jednom bodě.

Příklad 2. Označme X, Y, Z ty body trojúhelníka ABC, ve kterých se kružnice vepsaná dotýká jeho obvodu. Dokažte, že se jim příslušné cèviány se protínají v jednom bodě.

Příklad 3. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P, který leží na těžnici z vrcholu C. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík BP a AC. Ukažte, že $|AC| = |BC|$, víte-li, že $ABXY$ je tětivový.

Příklad 4. Mějme trojúhelník ABC. Na výšce AX zvolme bod P. Dále $BP \cap \cap AC = K$ a $CP \cap AB = L$. Dokažte, že $|\sphericalangle AXK| = |\sphericalangle AXL|$.

Příklad 5. (Goniometrický tvar Cèvovy věty) Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem právě, když platí

$$\frac{\sin(\sphericalangle ACZ) \cdot \sin(\sphericalangle BAX) \cdot \sin(\sphericalangle CBY)}{\sin(\sphericalangle BCZ) \cdot \sin(\sphericalangle CAX) \cdot \sin(\sphericalangle ABY)} = 1$$

Klíčová slova. planimetrie, geometrie, Cèvova věta, Menelaova věta, Van Aubelova věta, sinová věta, podobnost, mocnost bodu ke kružnici, poměry

Příklad 6. Pomocí goniometrického tvaru Cèvovy věty dokažte, že se a) výšky, b) osy úhlů protínají v jednom bodě.

Příklad 7. (O existenci isogonal cojugate) Mějme trojúhelník a v něm tři cèviány protínající se v bodě P. Každou z nich nyní zobrazíme v osové souměrnosti podle osy úhlu (toho, ze kterého ona cèviána vychází). Tím získáme tři jiné cèviány. Dokažte, že i ty se protínají v jednom bodě. Tomuto bodu se říká isogonal cojugate k bodu P.

Příklad 8. Mějme trojúhelník ABC a AL, BM, CN jsou jeho výšky. Dokažte, že se kolmice z bodů A, B a C postupně na přímky MN, LN, LM protínají v jednom bodě.

Menelaova věta

Věta. (Menelaova) *Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC, AC a AB (jeden z nich je vně $\triangle ABC$). Body X, Y a Z leží v přímce právě, když platí*

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1.$$

Příklad 9. Dokažte, že body, v nichž se protnou strany trojúhelníka ABC s osami dvou vnitřních a zbývajícího vnějšího úhlu, leží v přímce.

Příklad 10. Kružnice procházející vrcholy B a C trojúhelníka ABC se protne se stranou AB v bodě P a se stranou AC v bodě R. Označme $PR \cap BC = Q$. Dokažte, že

$$\frac{|QC|}{|QB|} = \frac{|RC||AC|}{|PB||AB|}.$$

Příklad 11. Mějme trojúhelník ABC a přímku vedoucí přes těžiště trojúhelníka, která protne strany AB a AC postupně v bodech M a N. Dokažte, že

$$\frac{|CN|}{|NA|} + \frac{|BM|}{|MA|} = 1.$$

Příklad 12. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník s $|AC| = |BC|$. Kružnice vepsaná se dotýká stran AB a AC postupně v bodech D a E. Bodem B vedeme přímku různou od BE, která protne kružnici vepsanou v bodech F a G. Nechť AB protíná přímky EF a EG postupně v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$.
(MEMO 2008)

Těžší úlohy

Nyní si spočítáme několik úloh. Bude dobré vědět, že Cèvova věta platí i pro bod vně trojúhelníku a Menelaova věta i pro přímku, která trojúhelník neprotne (oba důkazy se dělají obdobně). Nezapomeňte používat také mocnost, podobnost, sinovou větu nebo dokonce kombinovat více Cèvových/Menelaových vět. Jak se na úloze pozná, že můžeme použít Cèvovu nebo Menelaovu větu? Posuďte sami.

Příklad 13. Strany AB, BC, CD a DA čtyřúhelníku $ABCD$ protne přímka postupně v bodech K, L, M a N. Dokažte, že

$$\frac{|BL||AK||DN||CM|}{|LC||KB||NA||MD|} = 1$$

Příklad 14. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho výšky AA', BB'. Zvolme bod D na oblouku ACB kružnice opsané trojúhelníku ABC. Buď $AA' \cap BD = P$ a $BB' \cap AD = Q$. Ukažte, že střed úsečky PQ leží na $A'B'$.

Příklad 15. Nechť ABC je trojúhelník a M je jeho vnitřní bod, který zároveň leží na ose úhlu γ. Přímky AM, BM a CM protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech A', B' a C'. Dále $A'C' \cap BC = P$ a $B'C' \cap AC = Q$. Dokažte, že $PQ \parallel AB$. (Indie 2010)

Příklad 16. Je daný konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, kde $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD|$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ a $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokažte, že přímky AD, BE a CF se protnou v jednom bodě. (Trojstřetnutí 2008)

Příklad 17. V trojúhelníku ABC zvolme body E a F, tak, že $E \in AB$, $F \in AC$ a zároveň $|AE| = |AF|$. Dále bod M je střed strany BC a $EF \cap AM = Q$. Dokažte, že

$$\frac{|QE|}{|QF|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Příklad 18. Tečny kružnice opsané $\triangle ABC$ v bodech A, B a C protnou strany BC, AC a AB postupně v bodech P, Q a R. Dokažte, že P, Q a R leží na jedné přímce.

Příklad 19. (O skládání stejnolehlostí) Jsou dané tři kružnice. Pro každé dvě kružnice vezmeme průsečík jejich vnějších společných tečen. Dokažte, že všechny tři tyto průsečíky leží v přímce.

Příklad 20. O něco jiný tvar goniometrické Cèvovy věty, avšak stejně dobře použitelný: Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí

$$\frac{\sin(\sphericalangle AYZ) \cdot \sin(\sphericalangle BZX) \cdot \sin(\sphericalangle CXY)}{\sin(\sphericalangle AZY) \cdot \sin(\sphericalangle BXZ) \cdot \sin(\sphericalangle CYX)} = 1.$$

Příklad 21. Mějme tři cèviány AX, BY a CZ trojúhelníka ABC protínající se v jednom bodě. Označme P, Q, R po řadě středy úseček YZ, XZ, XY. Dokažte, že přímky AP, BQ a CR procházejí jedním bodem. (Mathematical Reflections)

Příklad 22. Nechť se cèviány AK, BL a CM v trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě. Označíme-li $KL \cap AB = X$, $LM \cap BC = Y$ a $KM \cap AC = Y$, pak dokažte, že X, Y a Z leží na jedné přímce.

Příklad 23. V trojúhelníku ABC jsou body P, Q a R středy stran AB, BC a AC. Cèviány AN, BL a CM se protínají v jednom bodě. Dále $PL \cap BC = J$, $MQ \cap AC = I$ a $NR \cap AB = H$. Dokažte, že H, I a J leží na jedné přímce.

Příklad 24. Je daný trojúhelník ABC. Kružnice dotýkající se strany BC v jejím středě protne strany AB a AC v bodech R, R' a S, S'. Buď $RS \cap BC = P$ a $R'S' \cap BC = P'$. Dokažte, že $|BP'| = |CP|$.

Příklad 25. (Pascalova věta) Body A, B, C, D, E a F leží na jedné kružnici v libovolném pořadí. Nechť $AB \cap DE = L$, $BC \cap EF = M$ a $CD \cap FA = N$. Dokažte, že body L, M a N leží na jedné přímce.

Příklad 26. Je daný čtyřúhelník $ABCD$ a body $Q = AD \cap BC$, $P = AB \cap CD$, $R = AC \cap BD$, $K = QR \cap AB$, $L = PR \cap BC = L$ a $T = AC \cap PQ$. Dokažte, že K, L a T leží na jedné přímce.

Příklad 27. (Van Aubelova věta) Mějme trojúhelník ABC a v něm cèviány AL, BM a CN, které se protínají v bodě P. Dokažte, že

$$\frac{|AP|}{|PL|} = \frac{|MA|}{|CM|} + \frac{|AN|}{|NB|}.$$

Literatura a zdroje

[1] Alfred S.Posamentier, Charles T. Salkind, *Challenging Problems in Geometry*, 1996.

[2] Webová stránka *http://www.mathlinks.ro/Forum*

[3] Přednášky *Umění vidět v matematice* vedené Michalem „Kenny“ Rolínkem