Celá část čísla

Tomáš Roskovec

Základní pojmy

Tato přednáška se bude zabývat tématem z teorie čísel, které dává do souvislosti celá čísla s reálnými pomocí dvou funkcí.

Definice. *Celá část čísla je funkce, která přiřadí reálnému číslu největší celé číslo, které jej nepřevyšuje. Značíme* $\lfloor x \rfloor$.

Poznámka. Alternativou definice je, že $\lfloor x \rfloor$ je jediné celé číslo, splňující nerovnosti

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Definice. *Necelá část čísla je funkce, kterou definujeme pomocí celé části jako rozdíl* $\langle x \rangle := x - \lfloor x \rfloor$.

Poznámka. Horní celou část čísla lze definovat jako nejmenší celé číslo větší nebo rovno než x, ale s tímto pojmem nebudeme během přednášky pracovat.

Několik zajímavých vlastností

Lemma. *Pro všechna x, y reálná, m celá, n přirozená platí následující nerovnosti*

$$\lfloor x + m \rfloor \leq x + m < (\lfloor x \rfloor + m) + 1$$

$$\left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Lemma. *Pro každé přirozené číslo n a $x \geq n$ platí, že $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ udává počet všech přirozených čísel dělitelných n, která nepřevyšují x.*

Lemma. *Pro n přirozené a x reálné platí následující rovnosti*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

$$\langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \left\langle x + \frac{2}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle = \langle nx \rangle + \frac{n-1}{2}$$

Příklad. Kolik přirozených čísel menších než 1000 není násobkem 5 ani 7?

Příklad. Jakých hodnot nabývá výraz $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$?

Příklad. Dokaž nerovnosti $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1, \quad -1 \leq \langle 2x \rangle - 2\langle x \rangle \leq 0.$

Příklad. Dokaž $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$

Celá část a prvočíselný rozklad faktoriálu

Věta. *Pro libovolné prvočíslo p a n přirozené je exponent mocniny p v rozkladu čísla $n!$ na prvočísla určen vzorcem*

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$

kde k je libovolné číslo takové, že $n < p^{k+1}$.

Příklad. Kolikrát můžeme číslo 1425! vydělit beze zbytku 11? Jaká bude poslední cifra čísla po těchto děleních?

Příklad. Jaký je ciferný součet ciferného součtu čísla 154! ?

Rovnice a další příklady

Příklad. Jaké jsou kořeny rovnice $\lfloor x^3 \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = \langle x \rangle - 1$?

Příklad. Najdi všechna n, pro která platí $217 = \lfloor \frac{1}{10} \rfloor + \lfloor \frac{2}{10} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{10} \rfloor$.

Příklad. Najdi řešení $\lfloor x^2 \rfloor = x$.

Příklad. Najdi řešení $\lfloor x^2 \rfloor = 2$.

Příklad. Najdi řešení $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$.

Příklad. Najdi řešení $3\lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor = 2\langle x \rangle$.

Příklad. Najdi řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \left\lfloor \sqrt{y-1} \right\rfloor^2 &= x + 1 \\ 2\left\lfloor \sqrt{y + 2\sqrt{x}} \right\rfloor^2 &= y - 1. \end{aligned}$$

Příklad. Dokažte, že následující rovnice nemá řešení $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12345$

Příklad. Kolik řešení má rovnice

$$x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = \langle x \rangle^2$$

Literatura

[1] Herman Jiří, Kučera Radan, Šimša Jaromír: *Metody řešení matematických úloh I*, Masarykova univerzita, Brno, 2001.