Dolní celá a zlomková část čísla

Rado Švarc

Abstrakt. Příspěvek popisuje základní vlastnosti funkcí celá a zlomková část čísla. Krom definice a popisu základních vlastností příspěvek obsahuje také mnoho příkladů na základní typy úloh souvisejících s těmito funkcemi.

Definice. Jako funkci $\lfloor x \rfloor$ definujeme (zjevně jednoznačně dané) celé číslo, pro které platí $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Toto číslo pak nazýváme *dolní celou částí* x (slovíčko dolní se občas vynechává).

Definice. *Zlomková* (někdy též *necelá* nebo *desetinná*) *část čísla* x se definuje jako $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Tedy například $\lfloor 1{,}17 \rfloor = 1$, $\{1{,}17\} = 0{,}17$, $\lfloor -3{,}7 \rfloor = -4$, $\{-3{,}7\} = 0{,}3$. Důležité je, že funkce celá část není zaokrouhlování. Zaokrouhlování je ve skutečnosti funkce $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Dolní celá a zlomková část mají mnoho vlastností, které jsou sice obvykle více či méně zřejmé, ale rozhodně se hodí mít je na paměti.

Tvrzení. *Pokud x a y jsou reálná čísla a n celé číslo, pak platí následující tvrzení.*

(i) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
(ii) $\{x + n\} = \{x\}$.
(iii) *Dolní celá část je neklesající funkce, tj. pokud $x \leq y$, pak $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.*
(iv) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
(v) $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$.
(vi) *Pokud jsou x a y nezáporná čísla, pak $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$.*
(vii) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.
(viii) *Číslo $\lfloor x \rfloor$ je vždy celé.*
(ix) $0 \leq \{x\} < 1$.

Doporučuji čtenáři se nad všemi tvrzeními alespoň na chvíli zamyslet a uvědomit si, že platí.

Skákání a intervaly

Jednou ze základních vlastností celé části je, že je „zblízka konstantní“, tj. mění svou hodnotu jen při přechodu přes celé číslo, což se nestává příliš často. Toho se dá využít pro důkaz mnohých vztahů, a to hned dvěma způsoby. Prvním je „skákání“. To spočívá v důkazu indukcí, ve kterém využíváme tvrzení typu „tento člen se nemění/mění konstantně, s výjimkou případu, kdy …“ Druhý způsob spočívá v rozdělení čísel do skupin (dle zlomkové části či velikosti) tak, aby výraz, se kterým pracujeme, byl v celém intervalu konstantní. Poté buď projdeme všechny možnosti, nebo to prostě vyřešíme algebraicky v obecném intervalu.

Příklad 1. Jako a_n si označme n-té nejmenší přirozené číslo, které není čtverec. Ukažte, že

$$a_n = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

Příklad 2. Pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ dokažte rovnost

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \cdots + \lfloor \log_n n \rfloor .$$

(iKS 2013/2014)

Příklad 3. Pro všechna reálná čísla x a přirozená čísla n dokažte rovnost

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

(Hermite)

Příklad 4. Pro všechna reálná x ukažte rovnost

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3}{6} \right\rfloor .$$

Příklad 5. Pro všechna přirozená n ukažte rovnosti

(i) $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$, (Kanada 1987)

(ii) $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+8} \rfloor$. (Írán 1996)

Rovnice a odhady

Pravděpodobně nejrozšířenějším druhem úloh zabývajících se celými a zlomkovými částmi jsou rovnice. Obvykle platí, že pokud se v rovnici vyskytnou všechny tři čísla x, $\lfloor x \rfloor$ a $\{x\}$, chcete se jednoho z nich zbavit použitím nějakého tvaru rovnice $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Obvykle se snažíte zbavovat členu, který je „nejjednodušší“ (má nejnižší stupeň, roznásobení dá nejméně práce atp.). Pokud jsou na tom všechny přibližně stejně, bývá obvykle nejlepší zbavovat se členu x. Důvod je ten, že o $\{x\}$ víte, že leží na intervalu $[0, 1]$, o $\lfloor x \rfloor$ víte, že je to celé číslo, ale o x nevíte skoro nic. Pokud máte rovnici s členy $\lfloor x \rfloor$ a $\{x\}$, obvykle je správná cesta celý výraz odhadnout shora a zdola pomocí $0 \leq \{x\} < 1$, získat interval, ve kterém leží $\lfloor x \rfloor$ a protože je to celé číslo, stačí vyzkoušet všechny možnosti. Občas existuje i rychlejší řešení, ale většinou bývá dosti trikové.

Nakonec, pokud pracujeme s rovnicí bez zlomkových částí, dá se občas použít (dosti mlhavé) „tvrzení“ $\lfloor x \rfloor \approx x$. To nám občas poradí s tím co máme s rovnicí dělat. Při skutečném dokazování se poté využije konkrétnější tvar $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

Příklad 6. Nalezněte všechna reálná čísla x taková, že $\lfloor x\rfloor^2 + 4\{x\}^2 = 4x - 5$.

Příklad 7. Nalezněte všechna reálná čísla x taková, že

$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{\lfloor x\rfloor}.$$

Příklad 8. Nalezněte všechny trojice reálných čísel (x, y, z) takové, že

$$\begin{aligned} x + \lfloor y\rfloor + \{z\} &= 1{,}1,\\ \lfloor x\rfloor + \{y\} + z &= 2{,}2,\\ \{x\} + y + \lfloor z\rfloor &= 3{,}3. \end{aligned}$$

(Rumunsko 1979, Austrálie 1999)

Příklad 9. Nalezněte všechna reálná čísla x taková, že $\lfloor x^2 + 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor^2 + 2\lfloor x\rfloor$.

(Indie 2009)

Příklad 10. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) takových, že

$$\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{ab} \right\rfloor + ab.$$

(IMO shortlist 1996)

Příklad 11. Nechť x je reálné číslo. Ukažte, že x je celé číslo právě tehdy, když pro všechna přirozená čísla n platí

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor = \frac{n(\lfloor x\rfloor + \lfloor nx\rfloor)}{2}.$$

Sudost a dělení

Další z oblíbených typů úloh s celou a zlomkovou částí se zabývá dělením/dělitelností celými čísly. Pokud jde o dělitelnost, zajímá nás většinou dělitelnost dvojkou. Užitečný trik v tomto případě je binární zápis. V tu chvíli je totiž celá část čísla před desetinou čárkou a zlomková za desetinnou čárkou. Sudost/lichost v tu chvíli určuje poslední cifra před desetinnou čárkou. Často ovšem ani tento trik nepomůže a je třeba mít jednoduše vhled do toho, jak celá část čísla funguje. Pokud jde o práci s celými/zlomkovými částmi zlomku, užitečným trikem je fakt, že $b \cdot \{a/b\}$ je zbytek po dělení čísla a číslem b, zatímco $\lfloor a/b\rfloor$ je počet násobků b menších nebo rovných a.

Příklad 12. Ukažte, že následující posloupnosti obsahují nekonečně mnoho sudých a lichých čísel:

(i) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3}{2} a_n \right\rfloor$,

(ii) $a_n = \lfloor 2^n\sqrt{2}\rfloor + \lfloor 2^n\sqrt{3}\rfloor$. (Čína pro holky, 2008)

Příklad 13. Je číslo $\lfloor (1+\sqrt{2})^{2010!} \rfloor$ sudé, nebo liché? (MKS 30–1–7)

Příklad 14. Pro dvojici nenulových reálných čísel a, b platí, že pro libovolné přirozené n je číslo $\lfloor an+b \rfloor$ sudé. Ukažte, že a je sudé celé číslo.

Příklad 15. Ukažte, že pro dvojici nesoudělných přirozených čísel p, q platí

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

(Gauss)

Příklad 16. Nechť p je prvočíslo a s je přirozené číslo menší než p. Dokažte, že $s \mid p-1$ právě tehdy, když neexistují přirozená čísla m, n taková, že $m<n<p$ a

$$\left\{ \frac{sm}{p} \right\} < \left\{ \frac{sn}{p} \right\} < \frac{s}{p}.$$

(USA 2006)

Myšmaš

Přestože se v olympiádách a na soutěžích některé druhy úloh objevují častěji než jiné, každou chvíli je zadána absolutně **originální** úloha. A co pak s tím? V tu chvíli jediný způsob, kterým se dá připravit, je mít dobrý vhled do daného oboru. A ten se získá jen počítáním dalších originálních příkladů. Dolní celá a zlomková část jsou naneštěstí (nebo naštěstí?) tak jednoduché funkce, že se na ně dají vymyslet mraky originálních, neobvyklých a šťavňatých úloh.

Příklad 17. Nalezněte polynom $P(x,y)$, který není identicky rovný nule, ale zároveň pro libovolné x platí $P(\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor) = 0$.

Příklad 18. Ukažte, že pro každé přirozené n platí

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \cdots + \{\sqrt{n^2-1}\} + \{\sqrt{n^2}\} \le \frac{n^2-1}{2}.$$

(Rusko 1999)

Příklad 19. Nechť α a β jsou kladná iracionální čísla taková, že $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Nechť $a_i = \lfloor i\alpha \rfloor$ a $b_i = \lfloor i\beta \rfloor$. Ukažte, že každé přirozené číslo leží v právě jedné z těchto posloupností, a to právě jednou. (Beatty)

Příklad 20. Nechť x_1 je racionální číslo větší než jedna. Nechť

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}.$$

Ukažte, že tato posloupnost obsahuje přirozené číslo. (Rusko 2007)

Příklad 21. Nalezněte všechny funkce na reálných číslech takové, že pro libovolnou dvojici reálných čísel x, y platí

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor.$$

(IMO 2010)

Příklad 22. Vyčíslete součet

$$\left\lfloor \frac{2^0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor.$$

(Rusko 2000)

Příklad 23. Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reálných čísel splňuje vztah

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \{a_i\}.$$

Ukažte, že existuje N takové, že pokud $n \geq N$, pak $a_{n+2} = a_n$.
(IMO shortlist 2006)

Příklad 24. Nechť a_0 je přirozené číslo. Pokud $5 \mid a_n$, pak $a_{n+1} = a_n/5$, jinak $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{5} a_n \rfloor$. Ukažte, že existuje N takové, že pokud $n \geq N$, pak $a_{n+1} > a_n$.
(Rusko 2003)

Příklad 25. Nechť

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right),$$

kde n je přirozené číslo. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho n takových, že

(i) $a_{n+1} > a_n$,
(ii) $a_{n+1} < a_n$.

(IMO shortlist 2006)

Příklad 26. Konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$ celých čísel nazveme *cool*, pokud existuje x takové, že $a_k = \lfloor kx \rfloor$ pro všechna k mezi 1 a n. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ je cool posloupnost. Potom člen a_k (kde $1 \leq k \leq 1000$) nazveme *nutný* právě tehdy, když posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b$ je cool právě tehdy, když $b = a_k$. Kolik nejvíce nutných členů může obsahovat tato posloupnost? (USA TST 2013)

Literatura a zdroje

[1] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng, *104 Number Theory Problems from USA IMO Training*, Birkhäuser, Boston, 2007.
[2] Titu Andreescu, *105 Algebra Problems from the AwesomeMath Summer Program*, XYZ Press, LLC, 2013.
[3] *http://www.mathlinks.ro*