Cauchyova rovnice

David Stanovský

Funkcionální rovnice se liší od běžných, na střední škole řešených, rovnic tím, že neznámou není číslo, ale funkce. Hledáme (obvykle spojitou) funkci splňující danou identitu. Způsobů řešení je velké množství. Cauchyova rovnice je jednou z důležitých funkcionálních rovnic. Její postup řešení je poměrně originální a poučný, proto nebude ztrátou času věnovat této jedné rovnici celou přednášku.

Spojitá řešení

Úloha. *Nalezněte všechny* **spojité** *funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takové, že* $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Obecně platný postup při řešení funkcionálních rovnic je dosazení několika speciálních hodnot za proměnné. Zkusme $x = y = 0$:

$$f(0) + f(0) = f(0) \implies f(0) = 0$$

Dále dosazujme postupně $y = x$, $y = 2x$, ... , čímž máme

$$2f(x) = f(2x), f(x) + f(2x) = 3f(x) = f(3x), \ldots$$

Nabízí se první pozorování.

Pozorování. (1) $\forall k \in \mathbb{N} \quad kf(x) = f(kx)$

Důsledek. $\forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) = ck$ *pro konstantu* $c = f(1) \in \mathbb{R}$.

Rádi bychom, aby toto tvrzení platilo nejen pro přirozená čísla. V dalším kroku proto rozšíříme toto tvrzení na čísla racionální.

Vezměme číslo $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ a $y = qx$. Pak $ny = mx$, proto také $f(ny) = f(mx)$. Podle předchozího pozorování $(m, n \in \mathbb{N})$ $f(ny) = nf(y) = mf(x) = f(mx)$. A tedy $f(y) = f(qx) = \frac{m}{n} f(x) = q(fx)$, což jsme chtěli dokázat.

Pozorování. (2) $\forall q \in \mathbb{Q} \quad qf(x) = f(qx)$

Důsledek. $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = cq$ *pro konstantu* $c = f(1) \in \mathbb{R}$.

Povšimněte si, že jsme dosud nepotřebovali předpoklad spojitosti f.

Nyní přijde klíčový krok – rozšíření pozorování na všechna reálná čísla. Pro spojité funkce platí následující věta.

Věta. (Heineho věta) *Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$, $x_n \to x$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Pro každé reálné číslo x existuje posloupnost racionálních čísel q_n taková, že $q_n \to x$. Proto můžeme psát (za použití pozorování a Heineho věty)

$$f(x) = f(\lim q_n) = \lim f(q_n) = \lim q_n f(1) = f(1) \lim q_n = f(1)x.$$

Tím máme dokázáno, že

$$f(x) = cx, c \in \mathbb{R}$$

jsou jediná spojitá řešení Cauchyovy rovnice, přičemž $c = f(1)$.

Nespojitá řešení

Úloha. *Nalezněte* **všechny** *funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Napohled zanedbatelná modifikace původního znění úlohy její řešení značně komplikuje. Pozorování (1) a (2) sice nadále platí, avšak není možné provést analogii třetího kroku. Ke slovu musí přijít vyšší matematika. Já pro ilustraci ukáži, jak se zkonstruují nějaká nespojitá řešení této úlohy, o úplné řešení se však pokoušet nebudu.

Lemma. *Nechť H je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$, zvolme $h_0 \in H$. Pro $x = r_0h_0 + r_1h_1 + \cdots + r_kh_k$, $r_i \in \mathbb{Q}$, definujme funkci f předpisem $f(x) = r_0$. Pak funkce f je řešením Cauchyovy rovnice.*

Jak vidíte, pro konstrukci nespojitých řešení používám několik vám asi neznámých pojmů. Zde je jejich vysvětlení:

Definice. *Vektorový prostor V nad tělesem T je množina, na které je definováno sčítání (asociativní, komutativní, s inverzí, s jednotkou) a násobení prvky z T tak, že platí $\forall\, v, w \in V, \alpha, \beta \in T$:*

(i) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
(ii) $(\alpha + \beta)v = \alpha v \ + \beta v$
(iii) $\alpha(v + w) = \alpha v + \beta v$
(iv) $1v = v$

Definice. $v = \mathrm{LK}(v_1, \ldots, v_n)$ *značí* $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T\ v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

Definice. *Lineární obal vektorů* $v_1, \ldots, v_n$ *se nazývá množina* $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \{v \in V : v = \mathrm{LK}(v_1, \ldots, v_n)\}$.

Definice. *Vektory* $v_1, \ldots, v_n$ *nazveme lineárně závislé, je-li* $v_n = \mathrm{LK}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. *Jinak tyto vektory nazveme lineárně nezávislé.*

Definice. *Bází vektorového prostoru* V *nad* T *nazveme množinu* $\{v_1, \ldots, v_n\}$, *pokud jsou vektory* $v_1, \ldots, v_n$ *lineárně nezávislé a* $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$.

Dokázat platnost lemmatu o řešeních Cauchyho rovnice je teď snadné. Nechť

$$x = r_0 h_0 + r_1 h_1 + \cdots + r_k h_k \qquad y = s_0 h_0 + s_1 h_1 + \cdots + s_k h_k.$$

Pak

$$x + y = (r_0 + s_0)h_0 + (r_1 + s_1)h_1 + \cdots + (r_k + s_k)h_k.$$

Čili

$$f(x) = r_0, \quad f(y) = s_0, \quad f(x + y) = r_0 + s_0.$$

Nyní již je vidět, že skutečně

$$f(x) + f(y) = r_0 + s_0 = f(x + y).$$