# Cauchyho tajemství

*Pavel Šalom*

Abstrakt. Příspěvek na příkladech ukazuje dvě techniky při používání AG nerovnosti a Cauchyho nerovnosti.

## Co se předpokládá

Na přednášce se bude předpokládat, že všichni znají Cauchyho nerovnost, AG nerovnost a jsou zvyklí na zápis pomocí cyklických sum. Hodit se bude též Schurova nerovnost. Podrobnosti se lze dočíst v letošním seriálu. Pro připomenutí

**Tvrzení.** (Schurova nerovnost) *Pro* $a, b, c \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, *platí*

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0.$$

**Tvrzení.** (Cauchyho nerovnost) *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ a $u_1, u_2, \dots u_n \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}$. *Pak platí*

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2.$$

**Tvrzení.** (CS zlomkobijec) *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$. *Pak platí*

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

**Tvrzení.** (CS na odmocniny) *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$. *Pak platí*

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \cdots + \sqrt{a_nb_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

## Co nám Cauchy zatajil

Ukážeme si dva nové přístupy k řešení nerovností obsahující zlomky a odmocniny. To většinou bývají právě ty méně příjemné nerovnosti. První z nich by se mohl jmenovat „AG zlomkobijec“, protože se hodí na zlomky podobně jako CS zlomkobijec. Ukažme si jej na příkladě.

**Příklad.** Pro kladná $a, b, c$ splňující $a + b + c = 3$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Klíčová slova. AG nerovnost, Cauchyho nerovnost

*Návod.* Úpravou a jednoduchým AG dostaneme

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2},$$

což spolu s jednoduchou nerovností $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9$ už dává dokazovanou nerovnost.

Druhý přístup se týká odmocnin. CS na odmocniny funguje dobře pro odhad jedním směrem, ale co když potřebujeme odhad druhým směrem? Na první pohled se může zdát, že s použitím Cauchyho nerovnosti příliš nepochodíme, ale opak je pravdou. Heslo zní: „Neboj se umocnit!"

**Příklad.** Buďte $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ pevná. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}$ taková, že $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2} \geq a + b + c.$$

*Návod.* Po umocnění chceme dokázat už jen

$$2\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(a^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2)} \geq 2(ab + bc + ca).$$

Použitím Cauchyho nerovnosti (členy přeskupíme, aby šlo použití CS lépe vidět)

$$\sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(c^2x^2 + a^2y^2 + b^2z^2)} \geq acx^2 + aby^2 + bcz^2$$

a sečtením analogicky získaných nerovností, dostaneme dokazovanou nerovnost.

**Příklad 1.** Pro kladná $a, b, c, d$ splňující $a + b + c + d = 4$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1 + b^2c} \geq 2.$$

**Příklad 2.** Pro kladná $a, b, c, d$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b + c + d}{2}.$$

**Příklad 3.** Pro kladná $a, b, c$ splňující $a + b + c = 3$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a + 2b^2} \geq 1.$$

**Příklad 4.** Pro kladná $a, b, c, d$ splňující $a + b + c + d = 4$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{1 + a^2} \geq 2.$$

**Příklad 5.** Pro kladná $a, b, c, d$ splňující $a + b + c + d = 4$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1 + ab}{1 + b^2c^2} \geq 4.$$

**Příklad 6.** Pro kladná $a, b, c$ splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2 + a^3} \geq 1.$$

**Příklad 7.** Pro kladná $a, b, c$ splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2 - a} \geq 3.$$

**Příklad 8.** Pro nezáporná $x, y, z$ splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - \left(\frac{x + y}{2}\right)^2} \geq \sqrt{6}.$$

**Příklad 9.** Pro kladná $a, b, c$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{b + c}} \geq 2\sqrt{1 + \frac{abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}}.$$

**Příklad 10.** Pro nezáporná $a, b, c$ splňující $a + b + c = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a + (b - c)^2} \geq \sqrt{3}.$$

**Příklad 11.** Pro nezáporná $a, b, c$ splňující $a + b + c = 2$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a + b}{2} - ab} \geq \sqrt{2}.$$

**Příklad 12.** Pro nezáporná $x, y, z$ splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - xy}\sqrt{1 - yz} \geq 2.$$

**Příklad 13.** Pro nezáporná $x, y, z$ splňující $x + y + z = 1$ dokažte
$$\sum_{\text{cyc}} x\sqrt{1 - yz} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$