Cauchy-Schwarzova nerovnost

Alča Skálová

Cauchy-Schwarz (zkracujeme CS) je hned po AG nerovnosti[1] nejdůležitější nerovností s širokým uplatněním. Tři nejběžnější způsoby se naučíme na následujících příkladech.

Věta. (Cauchy-Schwarzova nerovnost)
Pro každé dvě n-tice $u_1, u_2, \dots u_n \in \mathbb{R}$ a $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}$ platí

$$\left(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2\right) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $u_1 = \lambda v_1$, $u_2 = \lambda v_2, \dots, u_n = \lambda v_n$.

Klasický CS

Příklad 1. Buď ABC trojúhelník o stranách a, b, c a KLM trojúhelník o stranách k, l, m. Ukaž, že

$$(a^2 + b^2 + c^2)(k^2 + l^2 + m^2) = (ak + bl + cm)^2,$$

právě když $\triangle ABC \sim \triangle KLM$.

Příklad 2. Dokaž následující nerovnosti pro kladná čísla a_i, $i = 1 \dots n \in \mathbb{N}$:

(i) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$,

(ii) $n\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.

Příklad 3. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokaž, že platí

(i) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$,

(ii) $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$.

Příklad 4. Dokaž nerovnost pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

[1] Tak říkáme nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

CS a zlomky

Tvrzení. (CS zlomkobijec)
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{R}^+$. Pak platí

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}\right)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Příklad 5. Buďte a, b, c, d kladná čísla splňující $a + b + c + d = 1$. Ukaž, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irská MO)

Příklad 6. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokaž následující nerovnost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbittova nerovnost)

Příklad 7. Pro kladná čísla a, b, c dokaž nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

Příklad 8. Nechť a, b, c jsou kladná čísla, jejichž součin je roven jedné. Dokaž, že platí

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

CS a odmocniny

Tvrzení. *Buď n přirozené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ čísla kladná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

Příklad 9. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má levá strana smysl, dokaž nerovnost

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Příklad 10. Dokaž následující nerovnosti pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

(i) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$,

(ii) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$,

(iii) $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$.

Příklad 11. Kladná čísla $x, y, z \geq 1$ splňují $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokaž, že

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

(Iránská MO 1998)

Příklad 12. Pro kladná čísla a, b, c dokaž nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Literatura a zdroje

Přednáška čerpá ze seriálu Nerovnosti (29. ročník, na stránkách *mks.mff.cuni.cz* v sekci *Archiv*) napsaného Michalem „Kennym“ Rolínkem a Pavlem Šalomem.