Catalanova čísla

Martin Raška

Abstrakt. Catalanova čísla jsou vedle kombinačních čísel jedny z nejčastěji se vyskytujících posloupností čísel v kombinatorice. V tomto příspěvku si představíme, co to vlastně je, a podíváme se na překvapivé množství úloh, kde hrají roli.

Definice. *Obdélníkem* $m \times n$ rozumíme obdélník ve čtvercové mřížce, který je m políček vysoký a n políček široký. *Cestou* v obdélníku pak nazýváme trasu z levého dolního do pravého horního rohu, která vede po hranách mřížky, a to pouze doprava a nahoru.

Cvičení. Dokažte, že v obdélníku $m \times n$ existuje $\binom{m+n}{n}$ různých cest.

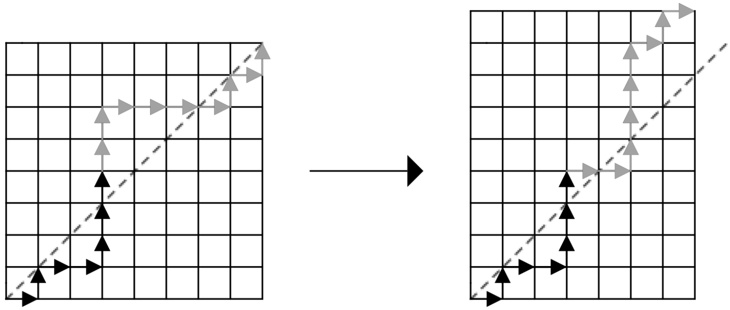
Definice. *Úhlopříčkou* ve čtverci $n \times n$ nazveme úsečku spojující levý dolní roh s pravým horním.

Definice. Symbolem C_n budeme značit n-té *Catalanovo číslo*, které si definujeme jako počet cest ve čtverci $n \times n$, které jsou celé pod úhlopříčkou (smí se jí dotýkat).

Tvrzení.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Důkaz. (náznak důkazu) Ve čtverci $n \times n$ spočítáme počet nevyhovujících cest, tj. takových cest, které překročí diagonálu, a tento počet pak odečteme od celkového počtu cest.



Mějme libovolnou nevyhovující cestu a podívejme se na místo, kde se poprvé dostane nad diagonálu. V momentě, kdy poprvé překročíme diagonálu a ujdeme krok směrem nahoru, zbytek cesty převrátíme, jak naznačuje obrázek (z cest nahoru se stanou cesty doprava a naopak). Nově vzniklá cesta bude obsahovat $n+1$ kroků směrem nahoru a $n-1$ kroků směrem doprava, bude tedy cestou v obdélníku $(n+1)\times(n-1)$. Překlopením nazpátek ve stejném místě dostaneme jednoznačně určenou původní cestu, tedy toto zobrazení je prosté.

Stejně tak můžeme z libovolné cesty v obdélníku $(n+1)\times(n-1)$ analogickým překlopením získat nevyhovující cestu v obdélníku $n\times n$ a toto zobrazení je rovněž prosté. Existuje tedy bijekce mezi cestami ve čtverci $n\times n$ překračujícími úhlopříčku a cestami v obdélníku $(n+1)\times(n-1)$, kterých je $\binom{2n}{n+1}$. $\square$

Poznámka. Často se definuje i $C_0 = 1$. Prvních několik Catalanových čísel je postupně 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...

Příklad 1. Kolik existuje různých cest v obdélníku $m\times n$, které jsou celé pod úhlopříčkou levého čtverce $m\times m$?

Rekurentní vzorec

Tvrzení. *Mějme posloupnost $(a_n)_{n\geq 0}$ splňující vztahy*

$$a_0 = 1,$$

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}.$$

Pak $a_n = C_n$.

Úloha. Kolik existuje různých triangulací konvexního n-úhelníka[1]?

Zobecnění

Vrátíme-li se k původní definici Catalanových čísel, je přirozené se zeptat, jaká čísla dostaneme, pokud daný obdélník nebude čtverec. To vede k rozšíření Catalanových čísel.

Definice. Definujeme $C(n,k)$ pro $0\leq k\leq n$ jako počet cest v obdélníku $k\times n$, které vedou celé pod diagonálou levého čtverce $k\times k$. Volbou $k=n$ dostaneme právě C_n.

Rozšířením prvního důkazu identity charakterizující Catalanova čísla dostaneme podobný vztah, konkrétně

$$C(n,k) = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k}{k-1}.$$

[1]Rozdělení na $n-2$ trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou vrcholy původního n-úhelníka.

Přirozená struktura této konstrukce nám dovoluje vytvořit Catalanův trojúhelník, který je znázorněný na obrázku.

						132	$\cdots$
					42	132	$\cdots$
				14	42	90	$\cdots$
			5	14	28	48	$\cdots$
		2	5	9	14	20	$\cdots$
	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$

Číslo $C(n, k)$ je v $(n+1)$-ním sloupci a $(k+1)$-ním řádku. Catalanova čísla jsou přesně na diagonále.

Z faktu, že čísla jsou definována jako počet cest, není již těžké přejít k rekurentnímu vztahu $C(n, k) = C(n, k-1) + C(n-1, k)$ pro $0 < k < n$. Ten říká, že číslo v Catalanově trojúhelníku je součtem čísla pod ním a nalevo od něj, což jsou přesně místa odkud můžeme k danému vrcholu dojít námi definovanými cestami. Tento trojúhelník má, stejně jako ten Pascalův, množství pěkných vlastností. Například si lze všimnout, že součet každého sloupce dává Catalanovo číslo.

Konečně nějaké příklady

Příklad 2. Kolik existuje korektních uzávorkování n párů závorek?

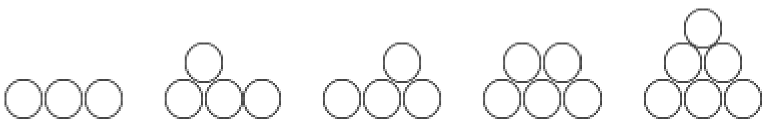
Příklad 3. Kolik existuje posloupností délky n splňujících $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ a navíc $a_i \leq i$?

Příklad 4. Kolika způsoby si může $2n$ lidí podat ruce přes stůl tak, aby se žádné dva páry rukou nekřížily (každý člověk podává právě jednu ruku jinému člověku)?

Příklad 5. Kolika způsoby lze vyplnit tabulku $2 \times n$ čísly 1 až $2n$ tak, aby čísla v obou řádcích i ve všech sloupcích byla rostoucí?

Příklad 6. Nechť n je přirozené číslo. Kolik existuje cest v kartézské soustavě souřadnic, které vedou z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2n, 0)$, takových, že z libovolného bodu (x, y) cesta pokračuje buď do bodu $(x+1, y+1)$, nebo do bodu $(x+1, y-1)$? Kolik z těchto cest nikdy neklesne pod osu x?

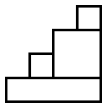
Příklad 7. Kolika způsoby je možné navršit mince na hromádku, je-li ve spodní řadě n mincí? Na obrázku jsou všechny možné hromádky pro $n = 3$.



Příklad 8. Kolik existuje binárních stromů[2] na n vrcholech? Rozlišujeme „pravé“ a „levé“ syny.

Příklad 9. Kolik existuje zakořeněných stromů (rozlišujeme pořadí synů) s n vrcholy?

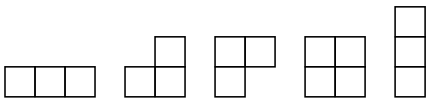
Příklad 10. Kolika způsoby je možno postavit schodiště o n schodech pomocí n obdélníků? Na obrázku je schodiště o 4 schodech postavené ze 4 obdélníků.



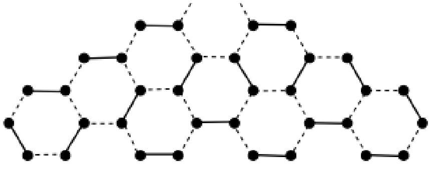
Příklad 11. Kolik je permutací množiny $\{1, \dots, n\}$, které neobsahují klesající podposloupnost délky větší než 2?
(Označíme-li permutaci p, pak neexistují $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $i < j < k$ a zároveň $p(i) > p(j) > p(k)$.)

Příklad 12. Pro která n je C_n liché?

Příklad 13. Polyomino[3] nazveme *neklesající*, pokud je každý jeho sloupec souvislý (tj. není rozdělen na více částí oddělených prázdnými čtverečky), pozice horního čtverečku v každém sloupci se zleva doprava nesnižuje a obdobně se v každém sloupci nesnižuje pozice nejnižšího čtverečku zleva doprava. Kolik existuje *neklesajících* polyomin s obvodem délky $2n$? Obrázek zachycuje případ pro $n = 4$.



Příklad 14. Kolik existuje úplných párování vrcholů na šestiúhelníkové pyramidě šířky n? Úplné párování na šestiúhelníkové pyramidě šířky 4 může vypadat například takto:



[2]Pokud nevíš, co to znamená, neboj se zeptat přenášejícího!
[3]Útvar vzniklý sloučením několika jednotkových čtverců dotýkajících se hranou.

Návody

2. Převeď si to na počet cest pod diagonálou nebo rekurzí podle první korektní podposloupnosti.

3. Převeď na hledání cest pod diagonálou – dívej se na vodorovné hrany.

5. Bijekce na cesty pod diagonálou. Pořadí pohybu danými směry.

7. Rekurze, nejpravější mezera v druhé vrstvě odspodu.

9. Zakóduj si strom pomocí 1 a 0 (resp. závorek) a převeď na příklad 2.

10. Dvě různá políčka na úhlopříčce nemůžou být ve stejném obdélníku. Roh.

11. Zaznač si permutaci to tabulky $n \times n$ a najdi pomocí permutace cestu nad/pod diagonálou.

12. Použij rekurentní vztah a indukci.

13. Koukni se na horní a dolní trasu z levého dolního do pravého horního rohu polyomina. Poskládej pomocí nich trasu pod diagonálou čtverce.

14. Otoč si obrázek o 150° po směru hodinových ručiček. V každé vrstvě svislých hran je na párování použita právě jedna hrana. Po otočení jde vidět přirozená bijekce mezi volbou těchto hran a hledání cest pod uhlopříčkou.

Literatura a zdroje

Velká část příspěvku je převzatá z přednášek Martina Hory a Anči Chejnovské, jimž bych tímto chtěl poděkovat.

[1] Martin Hora, *Catalanova čísla*, 2012 Domašov
[2] Anča Chejnovská, *Catalanova čísla*, 2015 Staré Město
[3] Richard P. Stanley, *Exercises on Catalan and Related Numbers*, *http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catalan.pdf*
[4] Tom Davis, *Catalan Numbers*, *http://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf*