Catalanova čísla

Anča Chejnovská

Abstrakt. Catalanova čísla jsou posloupnost 1, 1, 2, 5, 14, 42, ..., na kterou vedou zdánlivě nesouvisející kombinatorické úlohy. Na přednášce si povíme, jak je odvodit a co s nimi počítat.

Definice. Obdélníkem $m \times n$ rozumíme obdélník vysoký m políček a široký n políček. Jeho levý spodní vrchol označíme jako začátek a jeho pravý horní vrchol jako konec. Úhlopříčka pak je úsečka mezi začátkem a koncem. Dále cestou v takovém obdélníku rozumíme trasu ze začátku do konce, která vede po mřížce, a to pouze nahoru a doprava.

Cvičení. Ukažte, že v daném obdélníku $m \times n$ existuje přesně $\binom{m+n}{m}$ různých cest.

K tomuto celkem snadnému příkladu si však přidáme dodatečnou podmínku na cesty týkající se úhlopříčky.

Definice. n-té Catalanovo číslo je počet cest ve čtverci $n \times n$, které jsou celé pod úhlopříčkou (smí se jí dotýkat). Tento počet budeme značit symbolem C_n.

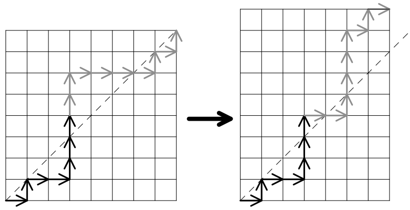
Vyčíslení

Tvrzení. *Platí vzorec*

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

K tomuto vzorci můžeme dospět různými způsoby. Uvedeme dva z nich, každý spočívá v jistém zobecnění úlohy spočítat Catalanovo číslo.

Příklad. Jsou dána čísla $m \leq n$. Kolik existuje cest v obdélníku $m \times n$, které jsou celé pod úhlopříčkou levého čtverce $m \times m$? Catalanova čísla dostaneme, volíme-li $m = n$.



Návod. Spočtěte ty cesty, které úhlopříčku překročí. U každé takové vezměte první bod nad diagonálou a překlopte zbytek cesty (místo doprava jděte nahoru a obráceně). Které cesty ve kterých obdélnících se takto dají dostat? Hledaný počet cest vyjde

$$\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m-1}.$$

Příklad. Jsou dána nesoudělná čísla m, n. Kolik existuje cest v obdélníku $m \times n$, které jsou celé pod úhlopříčkou tohoto obdélníka? Catalanova čísla dostaneme, volíme-li $m = n + 1$. (MKS 26–5–8)

Návod. Řekneme, že si dvě cesty odpovídají, pokud je možné jednu vytvořit z druhé tak, že se rozdělí na dvě a složí v opačném pořadí. Ukažte, že odpovídající si cesty budou tvořit $(m+n)$-tice, přičemž vždy právě jedna cesta z takové $(m+n)$-tice vede pod diagonálou.

Rekurentní vzorec

Tvrzení. *Mějme posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, která splňuje vztahy*

$$a_0 = 1,$$
$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i}.$$

Pak $a_n = C_n$.

Příklady

Příklad 1. Spočítejte počet korektních uzávorkování n párů závorek.

Příklad 2. Kolik je možností pořadí, ve kterém vyhodnotit výraz skládající se z n čísel a $n-1$ operací mezi nimi? Předpokládáme, že ve výrazu nejsou závorky a že neznáme priority operací.

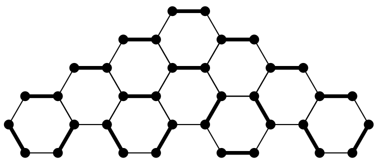
Příklad 3. Kolik existuje lomených čar délky n takových, že na každém celočíselném úseku délky 1 vedou šikmo (pod úhlem 45°) doprava nahoru nebo dolů, končí ve stejné výšce jako začínají a nikdy přitom neklesnou níž.

Příklad 4. Určete počet konečných posloupností čísel $(a_1, \ldots, a_n)$ takových, že pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq k \quad \text{a přitom} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = n.$$

Příklad 5. Kolik existuje permutací na n prvcích, které žádné trojici nezachovají pořadí?

Příklad 6. Kolik existuje úplných párování vrcholů na šestiúhelníkové pyramidě šířky n? Úplné párování na šestiúhelníkové pyramidě může vypadat například takto:



Příklad 7. Kolika způsoby se dá vyplnit tabulka $2 \times n$ čísly $1, 2, \ldots, 2n$ tak, aby oba řádky i všechny (dvouprvkové) sloupce byly rostoucí?

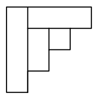
Příklad 8. Kolik lze vytvořit binárních stromů na n vrcholech tak, že rozlišujeme „pravé“ a „levé“ syny?

Příklad 9. Kolik zbude stromů v předchozí úloze, pokud přidáme podmínku, že každý vrchol musí mít dva syny, nebo žádného?

Příklad 10. Kolik je rovinných stromů na n vrcholech s vrcholy obarvenými dvěma barvami a jednou hranou určenou jako „význačnou“? Navíc dva stromy považujeme za různé, pokud se liší (cyklickým) pořadím hran kolem některého vrcholu.

Příklad 11. Kolika způsoby jde pravidelný n-úhelník rozdělit na trojúhelníky?

Příklad 12. Kolika způsoby je možné vyskládat schodiště velikosti n pomocí n obdélníků? Na obrázku vidíte schodiště velikosti 4 vyskládané čtyřmi obdélníky.



Příklad 13. Kolika způsoby si může podat $2n$ lidí ruce přes kulatý stůl tak, aby se jim nekřížily?

Literatura a zdroje

[1] Stanley, Richard P., *Catalan addendum to Enumerative Combinatorics* *www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf*

[2] Math Images, *http://mathforum.org/mathimages/index.php/Catalan_Numbers*

[3] Wikipedie, *http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number*