Částečná uspořádání

MARTIN „E.T." SÝKORA

ABSTRAKT. Příspěvek definuje částečná uspořádání a shrnuje některé teoretické poznatky, které o nich máme. Ve druhé části příspěvku jsou uvedeny rozličné příklady, ve kterých lze využít nastudovanou teorii.

Částečná uspořádání se pohybují na hranici středoškolské olympiádní a vysokoškolské matematiky. Ve středoškolských úlohách se jejich aplikace vyskytují spíše výjimečně, a proto ani v tomto příspěvku nečekej smršť olympiádních úloh. Přesto se k nějakým dostaneme. Nejprve si ale musíme odbýt (nebo užít?) teorii.

Teoretické minimum

Definice. *Kartézským součinem množin X a Y* rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in X$ a $y \in Y$. Tento součin značíme $X \times Y$. V případě, že $X = Y$, značíme jej tradičně X^2.

Definice. O množině M řekneme, že je *binární relací mezi množinami X a Y*, pokud $M \subseteq X \times Y$. Binární relace obvykle značíme písmenem R.

Poznámka. Místo relativně zdlouhavého zápisu $(x, y) \in R$ většinou píšeme $R(x, y)$ nebo xRy.

Poznámka. Speciálním případem relací jsou funkce. Jedná se o takové relace R, v nichž pro každé $x \in X$ existuje nejvýše jedno $y \in Y$ splňující $(x, y) \in R$.

Nyní si představme, že máme množinu X a na ní relaci R.[1] Pak o R řekneme, že je *částečným uspořádáním*[2] *množiny M*, pokud má následující vlastnosti:

(a) (Tranzitivita) Pokud pro nějaké tři prvky $x, y, z \in X$ platí $R(x, y)$ a $R(y, z)$, pak pro ně platí i $R(x, z)$.
(b) (Slabá antisymetrie) Pokud pro nějaké dva prvky $x, y \in X$ platí $R(x, y)$ a $R(y, x)$, pak $x = y$.
(c) (Reflexivita) Pro všechna $x \in X$ platí $R(x, x)$.

[1] Relací na množině M rozumíme relaci mezi množinami M a M.
[2] Místo pojmu částečné uspořádání často užíváme stručnější pojem uspořádání.

Částečná uspořádání jsou tedy kvůli reflexivitě neostrá.

Poznámka. Částečná uspořádání se místo R tradičně značí symbolem $\leq$. Nejčastěji se pak setkáváne se zápisem $x \leq y$, zatímco zápis $\leq (x, y)$ se používá výjimečně. Symbolem $\leq$ tedy odteď nebudeme značit relaci „menší nebo rovno“, ale libovolné částečné uspořádání. I přesto budeme zápis $x \geq y$ číst „x je větší než y“.

Definice. Uspořádanou dvojici $(X, \leq)$, kde X je nějaká množina a $\leq$ je částečné uspořádání, nazveme *častečně uspořádanou množinou*, neboli *ČUM*.

Definice. *Řetězcem* na ČUM $(X, \leq)$ nazveme množinu Y takovou, že pro všechna $x, y \in Y$ buď $x \leq y$, nebo $y \leq x$. *Antiřetězcem* na $(X, \leq)$ pak nazveme množinu Z takovou, že pro všechny $u, v \in Z, u \neq v$ neplatí ani $u \leq v$, ani $v \leq u$.

Definice. Prvek x z ČUM $(X, \leq)$ se nazývá

(i) *maximální*, pokud „žádný prvek není ostře větší“, tedy pokud pro žádné $y \in X$, $y \neq x$, neplatí $x \leq y$,
(ii) *největší*, pokud „je větší než všechny ostatní“, tedy pokud pro každé $y \in X$ platí $y \leq x$,
(iii) *minimální*, pokud „žádný prvek není ostře menší“, tedy pokud pro žádné $y \in X$, $y \neq x$, neplatí $y \leq x$,
(iv) *nejmenší*, pokud „je menší než všechny ostatní“, tedy pokud pro každé $y \in X$ platí $x \leq y$.

Teoretické maximum (které stihneme probrat)

Po smršti definic ze začátku si ukážeme několik zajímavých vět a tvrzení.

Věta. (O dlouhém a širokém) *Nechť (X, R) je konečná ČUM, $X \neq \emptyset$. Potom $|X| \leq \alpha(X, R) \cdot \omega(X, R)$, kde*

(i) *$\alpha(X, R)$ je počet prvků v největším antiřetězci,*
(ii) *$\omega(X, R)$ je počet prvků v největším řetězci.*

Věta. (Dilworthova) *Nechť k je velikost největšího antiřetězce v $(X, \leq)$, kde množina X je konečná. Pak lze X pokrýt pomocí k řetězců.*

Dilworthova věta má i svou duální sestru, která říká, že pokud je k velikost největšího řetězce v $(X, \leq)$, kde množina X je konečná, lze X pokrýt pomocí k antiřetězců.

Věta. (Spernerova) *Mějme libovolný antiřetězec F na množině všech podmnožin množiny $X, |X| = n$, uspořádané inkluzí. Pak $|F| \leq \binom{n}{n/2}$.*

A konečně příklady

Konečně se dostáváme k příkladům a úlohám. Některé z nich se dají řešit elementárně, jiné jsou ušity na míru jedné z výše uvedených vět. Nejprve si vyzkoušíme vyřešit několik spíše teoretických úloh (seřazených přibližně od nejlehčí po nejtěžší).

Cvičení 1. Dokažte, že pokud je prvek x nejmenším prvkem nějaké ČUM, pak je i jejím minimálním prvkem.

Cvičení 2. Je relace *být dělitelem* na množině přirozených čísel částečným uspořádáním? Jinak řečeno, je relace $R = \{(x, y); x \mid y\}$ částečné uspořádání na $\mathbb{N}$? Pokud ano, má maximální, minimální, největší a nejmenší prvky? Pokud ano, pokuste se je chrarakterizovat.

Cvičení 3. Dokažte, že každá konečná ČUM má minimální a maximální prvek.

Úloha 4. (Věta o reprezentaci) Ukažte, že pro každou ČUM $(X, \leq)$ existuje prosté zobrazení $f : X \to \mathcal{P}(X)$ takové, že $f(x) \subseteq f(y)$ právě tehdy, když $x \leq y$.

Následují o něco „praktičtější“ úlohy, jimž podobné lze potkat v různých matematických soutěžích, třeba MO. Opět jsou uspořádány přibližně podle obtížnosti.

Úloha 5. Ukažte, že mezi $n + 1$ čísly z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jsou dvě taková, že jedno dělí druhé.

Úloha 6. Je dáno 1001 obdélníků s celočíselnými délkami stran nepřesahujícími 1000. Dokažte, že je možné najít tři obdélníky takové, že jeden se vejde do druhého a druhý do třetího. Obdélníky je možné otáčet a stejně velké obdélníky se do sebe vejdou.

Úloha 7. Test skládající se ze tří úloh řešilo 49 studentů. Za každou úlohu bylo možné získat 0 až 7 bodů. Dokažte, že existují dva studenti takoví, že jeden z nich získal z každé úlohy alespoň tolik bodů jako ten druhý.

Úloha 8. Nechť n je bezčtvercové přirozené číslo.[3] Uvažme množinu D nějakých jeho dělitelů takových, že žádný dělitel z D nedělí jiného dělitele z D. V závislosti na n určete největší možnou velikost množiny D.

Úloha 9. (Erdős, Szekeres) Jsou dána přirozená čísla a, b. Ukažte, že z každé posloupnosti, jejíž členy se neopakují a která má délku $ab + 1$, lze vybrat rostoucí posloupnost délky $a + 1$ nebo klesající posloupnost délky $b + 1$.

Úloha 10. Mějme 50 ne nutně různých intervalů. Dokažte, že alespoň osm z nich má společný neprázdný průnik, nebo alespoň osm z nich je po dvou disjunktních. (AUO 1972)

Úloha 11. Buď n přirozené číslo. Množinu $S \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nazveme *trojatou*, pokud neobsahuje tři členy a, b, c takové, že $a \mid b$ a zároveň $b \mid c$. Určete největší možný počet prvků trojaté množiny S. (MEMO 2012)

Literatura a zdroje

[1] Matoušek, J. a Nešetřil, J.; *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Praha, 2002
[2] Mirek Olšák, *Od Dirichleta k pravděpodobnosti*, Sborník *i*KS, 2012

[3] Přirozené číslo je bezčtvercové, pokud jej nedělí čtverec žádného přirozeného čísla většího než jedna.