Relace, operace a splnitelnost podmínek

Mirek Olšák

Abstrakt. V informatice lidi často zajímá, zda je možné najít řešení nějaké úlohy inteligentněji než tupým zkoušením všech možností (přesněji zda existuje polynomiální algoritmus). Zde se budeme obecně věnovat úlohám typu „dají se zvolit za $x_1, \dots, x_n$ čísla z dané konečné množiny tak, aby byly splněny všechny předepsané podmínky?“ Přitom pro studium jednoduchosti podmínek (relací) se ukáže praktické studovat operace, které jsou s nimi „kompatibilní“.

Mějme danou konečnou nosnou množinu A.

Definice. Pojmem n-ární relace ($n \geq 1$) rozumíme podmnožinu kartézského součinu A^n. Pro relaci R značením $R(x_1, \dots, x_n)$ rozumíme $(x_1, \dots, x_n) \in R$.

Definice. Pojmem k-ární operace ($k \geq 1$) rozumíme zobrazení $f\colon A^k \to A$.

Definice. Říkáme, že n-ární relace R a k-ární operace f jsou kompatibilní, právě když pro libovolný systém $\{x_{i,j}\}, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots n$ splňující pro každé i $R(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$ platí už nutně

$$R\big(f(x_{1,1}, \dots, x_{k,1}), f(x_{1,2}, \dots, x_{k,2}), \dots, f(x_{1,n}, \dots, x_{k,n})\big).$$

Pro množinu relací $\mathcal{R}$ značíme $\mathrm{Pol}(\mathcal{R})$ množinu všech operací kompatibilních současně se všemi relacemi z $\mathcal{R}$. Takovým operacím říkáme polymorfismy.

Definice. Pro danou (ne nutně konečnou) množinu relací $\mathcal{R}$ definujeme $CSP(\mathcal{R})$[1] jako algoritmický problém, v němž algoritmus dostane na vstupu výrok tvaru

$$\exists x_1, \dots, x_k \in A : R_1(x_{i_{1,1}}, x_{i_{1,2}}, \dots) \wedge R_2(x_{i_{2,1}}, x_{i_{2,2}}, \dots) \wedge \dots \wedge R_n(x_{i_{n,1}}, x_{i_{n,2}}, \dots),$$

kde $R_1, \dots R_n \in \mathcal{R}$, a jeho úkolem je rozhodnout, zda tento výrok platí.

Definice. Říkáme, že problém A je polynomiálně převoditelný na problém B, pokud existuje algoritmus, který řeší problém A v polynomiálním čase a používá černou skříňku, která umí řešit problém B v konstantním čase.

Věta. *Mějme množinu relací $\mathcal{R}$. Označme $\mathcal{R}'$ množinu všech relací kompatibilních se všemi operacemi z $\mathrm{Pol}(\mathcal{R})$. Pak je $CSP(\mathcal{R}')$ polynomiálně převoditelný $CSP(\mathcal{R})$.*

[1] Constraint satisfaction problem

Předchozí věta vlastně říká, že pro obtížnost $CSP(\mathcal{R})$ je rozhodující, se kterými operacemi jsou všechny relace z $\mathcal{R}$ kompatibilní.

Pozorování. Množina $\mathrm{Pol}(\mathcal{R})$ obsahuje všechny projekce[2] a je uzavřená na skládání operací a slučování proměnných.

CSP na dvouprvkové množině

V dalším textu předpokládáme $A = \{0, 1\}$.

Tvrzení. *Je-li konstantní operace polymorfismus $\mathcal{R}$, pak je $CSP(\mathcal{R})$ řešitelný v lineárním čase.*

Definice. Označme n-ární relaci unární relace $C_0 = \{0\}, C_1 = \{1\}$ a n-ární

$$H_n = A^n \setminus \{(1, 1, \dots, 1, 0)\}.$$

Tvrzení. *$CSP(C_0, C_1, H_2, H_3, H_4, \dots)$ je řešitelné v polynomiálním čase.*

Tvrzení. *Je-li polymorfismem $\mathcal{R}$ binární operace $\wedge = \min$, je $CSP(\mathcal{R})$ polynomiálně převoditelný na $CSP(C_0, C_1, H_2, H_3, H_4, \dots)$.*

Tvrzení. *Soustava lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_2$ je řešitelná v polynomiálním čase.*

Tvrzení. *Je-li polymorfismem $\mathcal{R}$ ternární operace f splňující*

$$f(x, y, y) = f(y, x, y) = f(y, y, x) = x \quad \text{(říkáme jí minoritní)},$$

je $CSP(\mathcal{R})$ polynomiálně převoditelný na soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_2$.

Tvrzení. *Označme $\mathcal{R}_2$ množinu všech binárních a unárních relací. Pak $CSP(\mathcal{R}_2)$ je řešitelné v polynomiálním čase.*

Tvrzení. *Je-li polymorfismem $\mathcal{R}$ ternární operace f splňující*

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x \quad \text{(říkáme jí majoritní)},$$

je $CSP(\mathcal{R})$ polynomiálně převoditelný na $CSP(\mathcal{R}_2)$ z předchozího tvrzení.

Tvrzení. *Je-li $\mathcal{R}$ množina všech relací, $CSP(\mathcal{R})$ je NP-úplný.*

Tvrzení. *Nechť $\mathcal{R}_{\mathrm{all}}$ je množina všech relací a $\mathcal{R}_{\mathrm{sym}}$ je množina všech relací kompatibilních s unární operací negace $f(x) = 1 - x$. Pak je $CSP(\mathcal{R}_{\mathrm{all}})$ polynomiálně převoditelný na $CSP(\mathcal{R}_{\mathrm{sym}})$.*

Tvrzení. *Buď $\mathcal{O}$ množina operací obsahující všechny projekce, uzavřená na skládání a slučování proměnných. Pak buď $\mathcal{O}$ obsahuje nějakou operaci z možností: konstantní, $\wedge = \min$, $\vee = \max$, majoritní, minoritní, nebo je každá operace z $\mathcal{O}$ zapsatelná jako složení projekcí a negací.*

Důsledek. Každé CSP na dvouprvkové množině je polynomiálně řešitelné nebo NP úplné.

[2] Projekce je operace, které vrací hodnotu na své dané i-té souřadnici