Burnsideovo lemma

Mirek Olšák

Abstrakt. Kombinatorická úloha často žádá spočítat množství různých obarvení, uspořádání a podobně. Takové kalkulace jsou předmětem běžné středoškolské výuky. Potíž však nastane, jakmile je k úloze dodatek: „Obarvení lišící se pouze otočením/překlopením/posunutím považujeme za identická.“ A právě Burnsideovo lemma dává nástroj, jak se s tímto vypořádat. Na rozdíl od běžných přednášek o Burnsideově lemmatu se tento příspěvek snaží minimalizovat používání pojmů z teorie grup a nahradit je pojmy pokud možno přirozenými.

Úmluva. Není-li řečeno jinak, zanedbáváme pouze otáčení s předmětem – nikoli překlápění či jiné úpravy.

Netřeba jít s kanónem na vrabce

Ne ve všech případech je vhodné lemma třeba použít – někdy je jednodušší si rozmyslet všechny možnosti a situaci šikovně zjednodušit.

Úloha 1. Kolika způsoby můžeme přiřadit stěnám krychle čísla 1 až 6 (každé právě jednou) tak, aby součet hodnot protilehlých stěn byl vždy roven sedmi?

Úloha 2. Kolik je možností, jak obarvit stěny krychle dvěma barvami?

Úloha 3. Kolik existuje neizomorfních grafů na čtyřech vrcholech?

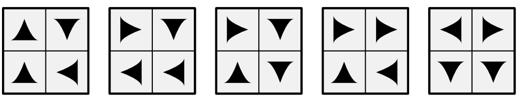
Úloha 4. Kolik existuje různých sítí krychle?

Úloha 5. Má více sítí krychle, nebo pravidelný osmistěn?

Úloha 6. Kolik je možností, jak obarvit vrcholy krychle dvěma barvami?

Terminologie

Definice. Obrázek[1] je jedna „kombinace“, u které zatím nic nezanedbáváme. Tedy pět různých obrázků může vypadat například takto:



[1]V odborné literatuře se typicky jedná o prvek množiny X.

Definice. Pohyb vezme obrázek a udělá z něj (typicky jiný) obrázek – je to tedy funkce, která zobrazí množinu obrázků do množiny obrázků. Například první čtveřice obrázků z předchozího příkladu vzniká postupně aplikováním pohybu „Otoč o 90° proti směru hodinových ručiček.“ Množina G všech uvažovaných pohybů (těch, které chceme zanedbat) musí tvořit grupu, což znamená:

(i) Kdykoli složíme (provedeme po sobě) dva pohyby z G, dostaneme opět pohyb z G.
(ii) V G musí existovat nepohyb – pohyb, který vše nechá na místě.
(iii) Pro každý pohyb $p \in G$ existuje opačný pohyb p^{-1}, který při složení (v kterémkoli pořadí) s původním pohybem p dá nepohyb.

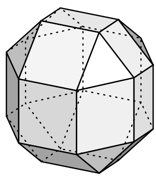
Poznámka. V úlohách je pohyb obvykle nejen zobrazením na množině obrázků, ale současně na bodech v rovině, respektive v prostoru. Může se tedy hypoteticky stát, že dva pohyby dávají tutéž permutaci na množině obrázků, ale jsou různé.

Definice. Předmět[2] je typicky to, co chceme spočítat – v podstatě totéž co obrázek až na to, že předměty lišící se jen nějakým pohybem považujeme za identické. Například první čtyři obrázky z příkladu odpovídají tomu samému předmětu.

Jdeme zanedbávat pohyby

Úloha 7. Kolik různých náhrdelníků (v rovině) je možné vytvořit z šesti černých a sedmi bílých korálků?

Úloha 8. Kolika způsoby můžeme nakreslit šipku směrem k jedné hraně na každou z 26 stěn následujícího tělesa (krychle se seřízlými hranami a vrcholy)?



Úloha 9. Na špíz můžeme napíchnout vždy maso, slaninu, nebo cibuli – celkem napíchneme deset kousků. Kolik existuje různých špízů (konce špejle jsou nerozlišitelné)?

Úloha 10. Kolik bude náhrdelníků z úlohy 7, pokud zanedbáme i překlápění?

S kanónem na draka

Taky vám vychází…?

[2] V odborné literatuře se používá pojem orbita.

Lemma. (Burnside) *Pro pohyb p označme S_p množinu všech obrázků odolných vůči p (tedy pevných bodů p). Pak počet předmětů spočteme jako*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{p\in G}|S_p|.$$

Úloha 11. Kolik náhrdelníků vyjde v úloze 7, budeme-li mít k dispozici dvanáct černých a dvanáct bílých korálků?

Úloha 12. Kolika způsoby můžeme obarvit políčka nekonečného čtverečkovaného papíru dvěma barvami tak, aby políčko $[x, y]$ mělo vždy stejnou barvu jako políčka $[x \pm 9, y]$ a $[x, y \pm 9]$? Obarvení lišící se pouze posunutím (avšak **nikoli** otočením či překlopením) považujeme za totožná.

Úloha 13. O kolik se zvětší výsledek úlohy 8, pokud budeme

(1) trojúhelníkové stěny barvit jednou ze tří barev namísto kreslení šipky,
(2) čtyřúhelníkové stěny sousedící s trojúhelníkovými barvit čtyřmi barvami namísto kreslení šipky,
(3) čtyřúhelníkové stěny nesousedící s trojúhelníkovými barvit čtyřmi barvami namísto kreslení šipky?

Úloha 14. Kolik je možností, jak obarvit právě patnáct z třiceti hran dvacetistěnu?

Úloha 15. Pro všechna přirozená čísla N a n dokažte, že n dělí $\sum_{k=1}^{n} N^{\gcd(n,k)}$, kde $\gcd(a, b)$ značí největší společný dělitel a a b.

Návody

1. 2

2. 10

3. 11

4. 20

5. Stějně (dá se popsat bijekce).

6. 30

7. $\binom{13}{6}/13$

8. $2^{33} \cdot 3^7$

9. $\left(3^9 + 3^5\right)/2$

10. $\left(\binom{13}{6} + 13\binom{6}{3}\right)/26$

11. $\left(\binom{24}{12} + \binom{12}{6} + 2\binom{8}{4} + 2\binom{6}{3} + 2\binom{4}{2} + 8\right)/24$

12. $(2^{81} + 8 \cdot 2^{27} + 72 \cdot 2^9)/81$

13. (i) $2^{12} \cdot 3^3$, (ii) $2^{14} \cdot 3^4$, (iii) $2^6 \cdot 3^2 + 2^{13} \cdot 3^4$

14. $\left(\binom{30}{15} + 20\binom{10}{5} + 24\binom{6}{3} + 30\binom{14}{7}\right)/60$