Burnsideovo lemma

Zuzka Safernová

Jedná se o velice silný nástroj při počítání jistých kombinatorických úloh, které by nám bez znalosti tohoto lemmatu připadaly neřešitelné :-)

Než si povíme, co toto úžasné lemma říká, přiblížíme si pár pojmů:

Definice. Permutace *množiny X je* prosté *zobrazení množiny X* na *X (tzn. žádné dva prvky se nezobrazí na stejný prvek (prosté) a zároveň se na každý prvek něco zobrazí (na).*

Definice. Grupa permutací[23] *v podstatě znamená, že máme množinu, na ní permutace a mezi permutacemi jakožto prvky množiny binární operaci skládání (složit 2 permutace znamená provést je za sebou – POZOR záleží na pořadí – běžně se permutace skládají zprava doleva). Ke každé permutaci existuje permutace k ní inverzní (složením permutace s permutací k ní inverzní dostaneme identitu).*

Definice. (Podgrupa) *Nechť S(X) je grupa permutací na množině X. Pojmem* podgrupa *rozumíme podmnožinu grupy S(X) takovou (označme ji G), která s každou permutací obsahuje i její inverzi a navíc je uzavřená na skládání (tzn. s každými dvěma permutacemi obsahuje i jejich složení – z čehož mimo jiné vyplývá, že obsahuje i identitu).*

Orbita, pevné body

Definujme ekvivalenci[24]$\sim$ na množině X následovně: $x \sim y$, pokud existuje permutace $g \in G$ taková, že $g(x) = y$. Navíc ekvivalence vytváří rozklad množiny na disjunktní bloky ekvivalence (tedy každý prvek množiny leží právě v jednom bloku). Ekvivalence tak sdružuje k sobě prvky stejných vlastností. Není těžké ověřit, že námi definovaná relace je opravdu ekvivalence. Její bloky se nazývají *orbity.* Orbita příslušná prvku x je vlastně množina bodů, kam se můžeme z bodu x dostat pomocí permutací z G. Množinově zapsáno $O_x = \{g(x); g \in G\}$.

Bod x se nazývá **pevným bodem** permutace π, pokud $\pi(x) = x$ (tedy se jedná o body, které permutace π zachová (nepohne s nimi). Množinu všech pevných bodů permutace π budeme značit $X_g = \{x \in X; g(x) = x\}$.

A teď již slíbené lemma:

Lemma. (Burnsideovo) *Působí-li konečná grupa G na konečnou množinu X, pak je počet orbit roven*

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|.$$

[23] Tohoto pojmu netřeba se bát :-)

[24] Ekvivalence je relace na množině A splňující tyto 3 podmínky: $a \sim a$ (*reflexivita*) , $a \sim b \Rightarrow$ $\Rightarrow b \sim a$ (*symetrie*) a pokud $a \sim b, b \sim c$, pak i $a \sim c$ (*tranzitivita*

Možná interpretace: „Počet orbit je roven průměrnému počtu pevných bodů permutací v G.“

Pěkný důkaz je v příspěvku Roberta Šámala: „Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati“. Jestli si ho na přednášce povíme i my, si však ještě rozmyslím :-)

Určitě Tě zajímá, na jaké typy příkladů se dá toto lemma aplikovat. Řešením drtivé většiny úloh bude právě počet orbit při působení grupy symetrií daného objektu na množinu všech obarvení či konfigurací.

Úlohy

Příklad 1. Kolik různých náhrdelníků lze sestavit ze 3 skleněných a 5 dřevěných korálků? Korálky jsou navlečené na šňůrce, takže dva náhrdelníky lišící se jen pootočením, považujeme za shodné. Jak se výsledek změní, budeme-li moci náhrdelník i převracet?

Příklad 2. Kolik náhrdelníků lze sestavit z k skleněných a $8 - k$ dřevěných korálků?

Příklad 3. Kolika způsoby lze obarvit políčka šachovnice

(1) 3×3
(2) 4×4
(3) $n \times n$

dvěma barvami? Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud lze dostat jedno z druhého pootočením šachovnice.

Příklad 4. Řešte předchozí úlohu za předpokladu, že je šachovnice skleněná (sklo je průhledné, šachovnice se teď dá i překlápět).

Příklad 5.

(1) Dětská šachovnice obsahuje 3 červené, 3 modré a 3 zelené čtvercové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3×3?
(2) Jak se změní výsledek, pokud je možné dílky pevně spojovat?

Příklad 6. Kolika způsoby lze obarvit stěny krychle

(1) 2 barvami?
(2) k barvami? Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno dostat z druhého otočením krychle.

Příklad 7. Kolika způsoby lze na stěny krychle umístit čísla 1–6? Kolika způsoby to lze udělat tak, aby byl součet protilehlých čísel 7?

Příklad 8. Kolika způsoby lze obarvit stěny čtyřstěnu

(1) 2 barvami?
(2) k barvami?

Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno dostat z druhého otočením čtyřstěnu. Co se stane, pokud budeme uvažovat všechny symetrie čtyřstěnu?

Úlohy jsou čerpány ze sbírky „Příklady z algebry“, kterou sepsal David Stanovský.

Zdroje

Robert Šámal: Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati
David Stanovský: Příklady z algebry