Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati

Robert Šámal

Pojmy

Burnsideovo lemma nám umožňuje velice jednoduše spočítat něco, o čem se zdá, že to snad ani spočítat nejde. Než se ale dostaneme k vlastnímu lemmatu, je třeba uvést (resp. připomenout) některé pojmy.

Permutace, grupa

Buď X nějaká množina. Symbolem $S(X)$ značíme *grupu všech permutací* množiny X. Tohoto pojmu se nemusíš lekat. *Permutace* na množině X je prostě nějaké „přeházení" prvků této množiny, formálně zobrazení z X do X, které je prosté (žádné dva prvky se nezobrazí na stejný prvek) a na (na každý prvek se něco zobrazí).

Množinu všech permutací na množině X budeme značit $S(X)$, jednotlivé permutace budou značeny řeckými písmenky (π, ρ, …). Permutace můžu skládat (tj. nejprve provedu jednu, pak druhou) a k dané permutaci můžu najít inverzní. Vpodstatě to je míněno slovy „$S(X)$ je grupa". Poznamenejme jenom, že $\pi \circ \rho$ značí permutaci vzniklou provedením ρ a pak provedením π (zápis je stejný jako při skládání funcí).

Pro další úvahy ještě vezměme jednu pevnou *podgrupu* grupy $S(X)$ a označme ji G. Slovem podgrupa se míní, že G je nějaká množina permutací, přičemž s každou permutací obsahuje i její inverzi a se dvěma permutacemi obsahuje i jejich složení (mj. tedy obsahuje i identitu, tj. permutaci, která všechny prvky nechává na místě). Pro další úvahy budou množina X a grupy $S(X)$ a G pevné.

Orbita

Pro $x \in X$ označme $O_x = \{\pi(x) \mid \pi \in G\}$ takzvanou *orbitu* prvku x; v podstatě to jsou body, kam se můžu z x dostat použitím permutací z G. Množinu všech orbit, tj. $\{O_x \mid x \in X\}$, budu značit $\mathscr{O}$.

Všimni si, že pokud $y \in O_x$, tak $O_x = O_y$. Intuitivně je to jasné — pokud se z jednoho místa mohu dostat do druhého, tak se z obou mohu dostat do týchž míst. A není problém toto přeformulovat do přesného důkazu.

Z toho ovšem plyne důležitý důsledek: orbity tvoří rozklad množiny X. Tím se míní, že každé $x \in X$ leží v právě jedné orbitě. Zjevně totiž $x \in O_x$. Pokud by x ležel ještě v nějaké jiné orbitě, tj. $x \in O_y$ a $O_x \neq O_y$, pak je dle přechozího odstavce $O_x = O_y$, což je spor. V množině $\mathscr{O}$ jsou tedy množiny, které jsou po dvou disjunktní a jejichž sjednocení je celé X.

Pevné body, stabilizátor

Je-li $\pi \in S(X)$, označme $P_\pi = \{x \in X \mid \pi(x) = x\}$ množinu tzv. *pevných bodů* permutace π, tj. těch bodů, které π nechává na místě.

Pro $x \in X$ označme $St_x = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\}$ množinu těch permutací z G, které nehnou s x.

Burnsideovo lemma

Věta. (Burnsideovo lemma)

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |P_\pi|,$$

čili slovy: počet orbit jest průměrný počet pevných bodů permutací z G.

K důkazu použijeme následující lemma.

Lemma. (Vlastnosti St)
Je-li $x \in X$, tak $|O_x| \cdot |St_x| = |G|$.
Jsou-li $x, y \in X$ a $y \in O_x$, tak $|St_x| = |St_y|$.

Důkaz. (1) Pro $y \in O_x$ označme π_y nějakou permutaci z G, která převádí x na y, tj. $\pi_y(x) = y$ (nějaká taková určitě existuje, jinak by y nebylo v O_x).

Chceme ukázat, že dvojic (y, ρ), $y \in O_x$, $\rho \in St_x$, je stejný počet jako prvků G. Nejlépe to uděláme tak, že najdeme předpis, jak takové dvojici přiřadit prvek G tak, aby různým dvojicím odpovídaly různé prvky G a každý prvek v G byl použit.

Dvojici (y, ρ) přiřaďme prvek $F(y, \rho) = \pi_y \circ \rho$. Protože π_y i ρ byly prvky G, je i jejich složení prvek G. Nyní je třeba ukázat, že zobrazení F je prosté a na.

F je prosté ... vezměme $(y_1, \rho_1) \neq (y_2, \rho_2)$. Nechť nejprve $y_1 \neq y_2$. Potom $F(y_1, \rho_1)(x) = y_1$, $F(y_2, \rho_2)(x) = y_2$, a tedy zobrazení $F(y_1, \rho_1)$ a $F(y_2, \rho_2)$ se liší alespoň hodnotou v prvku x. Nechť je tedy $y_1 = y_2 = y$, a tudíž $\rho_1 \neq \rho_2$. Existuje proto nějaké $z \in X$, pro něž $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$. Ovšem pak i $F(y, \rho_1)(z) \neq F(y, \rho_2)(z)$. Takže F je prosté.

F je na ... mějme $\sigma \in G$ a hledejme $y \in X$, $\rho \in St_x$, že $F(y, \rho) = \sigma$. Laskavý čtenář snadno nahlédne, že stačí vzít $y = \sigma(x)$ a $\rho = \pi_y^{-1} \circ \sigma$.

(2) Abychom ukázali, že $|St_x| = |St_y|$, najdeme nějaké zobrazení $F : St_x \to St_y$, které bude prosté a na. Položme $F(\rho) = \pi_y \circ \rho \circ \pi_y^{-1}$. Ihned vidíme, že pro $\rho \in St_x$ je $F(\rho) \in St_y$, a jako nepříliš težké cvičení si rozmysli, že F je prosté a na.

Důkaz. (Burnsideova lemmatu) Dokazovanou rovnost upravme na tvar $|\mathscr{O}| \cdot |G| = \sum_{\pi \in G} |P_\pi|$. Uvažme nyní množinu $A = \{(\pi, x) \mid \pi \in G, x \in P_\pi\}$. Nyní použijeme poměrně častý trik: budeme počítat velikost množiny A dvěma způsoby. Nejprve berme permutace π z G jednu po druhé a pro každou zjistěme, kolik $x \in X$ je možno k π přidat, aby vznikla dvojice z A. Tímto postupem zjistíme, že $|A| = \sum_{\pi \in G} |P_\pi|$.

A teď naopak probírejme prvky X a pro každý určeme, kolik k němu můžeme přidat permutací π. Takto zjistíme, že $|A| = \sum_{x \in X} |St_x|$. Vzhledem k předchozímu lemmatu, části (2), je toto rovno $\sum_{O \in \mathscr{O}} |O_{x_O}| \cdot |St_{x_O}|$, kde x_O je libovolný prvek O. Vzhledem k lemmatu, části (1), můžeme toto dále upravit na $\sum_{O \in \mathscr{O}} |G| = |\mathscr{O}| \cdot |G|$. Dohromady tedy dostáváme $|\mathscr{O}| \cdot |G| = \sum_{\pi \in G} |P_\pi|$, což jsme chtěli dokázat.

Aplikace

Pokud ses pročetl důkazem až sem, pak Ti blahopřeji, zde Tě čeká odměna — dozvíš se, jak pomocí Burnsideova lemmatu spočítat pár příkládků. Z toho první tady skutečně spočtu, další si můžeš zkusit rozmyslet sám, nebo počkej na přednášku.

Máme tři brilianty a pět safírů, z nichž máme za úkol sestavit co nejvíce různých náhrdelníků (resp. zjistit, kolika způsoby to jde). Náhrdelník vypadá tak, že naše drahokamy navlečeme na šňůrku (ta je vzadu svázaná, čili je to kružnice). Přitom dva náhrdelníky, které se liší jen pootočením, považujeme za shodné.

Kdybychom nedodali poslední větu, byla by odpověď lehká, hledaný počet by byl $\binom{8}{3} = 56$ (počítáme „pevné“ náhrdelníky, tj. náhrdelníky, u kterých záleží na natočení). Nám ovšem některé náhrdelníky splynou, takže jich bude méně. Jednou z možností, jak to zjistit, je použít Burnsideovo lemma.

Naší množinou X budou všechny pevné náhrdelníky. Grupa G bude odpovídat pootočením náhrdelníku. S náhrdelníkem můžeme provést celkem osm rotací R_0, R_1, …, R_7, přičemž R_k je rotace o $k \cdot 45^\circ$. Každé této rotaci odpovídá permutace na množině všech pevných náhrdelníků. Např. rotaci R_1 odpovídá permutace π_1, která každý pevný náhrdelník zobrazí na jiný pevný náhrdelník, oproti původnímu otočený o 45°.

Nyní počet orbit, tj. $|\mathscr{O}|$, je hledaný počet. Jedna orbita je totiž tvořena pevnými náhrdelníky, které jdou na sebe převést otočením a které tedy považujeme za jeden náhrdelník. Burnsideovo lemma nám říká, že tento počet můžeme zjistit tak, že pro $\pi_0, \dots, \pi_7$ určíme počet pevných bodů a spočteme průměr. Protože π_0 je identita, má $|X|$, tj. 56, pevných bodů. Snadno se rozmyslí, že ostatní permutace žádné pevné body nemají (pokud ti to nepřipadá snadné, tak si nakresli obrázek; pokud to nepomůže, tak přijď na přednášku). Průměrný počet pevných bodů je tedy $56/8 = 7$. Hledaný počet náhrdelníků je tedy 7.

Možná si říkáš, že na tohle bys přišel i bez Burnsideova lemmatu a mnohem snáze — a určitě máš pravdu. Tohle byl také jenom ilustrační příklad, který měl objasnit situaci. Představ si ale, že máš totéž zadání, v němž je však třicet tři briliantů a padesát pět safírů. To už bych se neodvážil řešit rozebíráním všech případů. A kdyby tam dokonce bylo b briliantů a s safírů, tak už to nějak „normálně“ ani řešit nejde.

Další pěkný příklad na užití Burnsideova lemmatu je zjistit, kolik existuje trojbarevných krychlí. Tj. kolika způsoby lze obarvit stěny krychle třemi barvami (černě, bíle a modře), přičemž dvě obarvení považujeme za totožná, pokud nějakým natočením kostky můžeme dostat z jednoho obarvení druhé. Všechny tyto příklady jdou řešit aplikací Burnsideova lemmatu, jediné, v čem se budou lišit, je probírání jednotlivých permutací z G a počítání jejich pevných bodů.