Burnsideovo lemma

Anička Chejnovská

Abstrakt. Burnsideovo lemma slouží k počítání kombinatorických objektů s ohledem na nějaký pohyb (například otočení).

Příklad. Kolika způsoby je možné obarvit políčka čtverce 2×2 dvěma barvami? Dvě obarvení přitom považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením čtverce.

Tento příklad lze samozřejmě řešit výčtem prvků jako na obrázku.

Pokud však bude čtverec větší nebo pokud se bude jednat o nějaký jiný objekt, výčet možností přestane připadat v úvahu. K počítání takových věcí nám slouží Burnsideovo lemma.

Permutační grupa

Vezměme si nějakou množinu a označme ji X. Permutace na množině X jsou všechna možná uspořádání prvků této množiny, formálně bijektivní zobrazení z X do X (každému vzoru je jednoznačně přiřazený jeho obraz a naopak).

Množinu všech permutací na množině X budeme značit $S(X)$. Na každé množině existuje identická permutace, která nechává prvky na místě. Permutace můžeme skládat a k dané permutaci můžeme najít inverzní (tj. složením permutace a jejího inverzu dostaneme identitu). Tyto vlastnosti nám stačí k tomu, abychom mohli nazývat $S(X)$ grupou. Poznamenejme jenom, že $g \circ h$ značí permutaci vzniklou provedením h a pak provedením g, a tedy obecně $g \circ h \neq h \circ g$.

Vezměme si jednu podmnožinu $S(X)$ a označme ji G. Pokud G obsahuje identitu, s každou permutací i její inverz a s každými dvěma permutacemi i jejich složení, pak G nazýváme podrupou grupy $S(X)$.

Působení permutací na množině

Působení permutací na množině je nějaké hýbání s jejími prvky, jak jsme už zmínili. Vezmeme si $x \in X$. Pokud budeme na X posílat všechny permutace z G, může se nám prvek x někam posunout. Bodům, na které se může x takhle dostat, říkáme orbita prvku x a značíme ji O_x. Množinu všech orbit, tj. orbity všech prvků množiny X, budeme značit $\mathcal{O}$.

Pozorování. *Pro všechna $x, y \in X$ platí buď $O_x = O_y$, nebo $O_x \cap O_y = \emptyset$.*

Důkaz. Vezmeme si $z \in O_x \cap O_y$ (jinak by byl průnik prázdný a pozorování by platilo) a dále $x' \in O_x$. Pak existují $g_1, g_2, g \in G$ takové, že $g_1(x) = z$, $g_2(y) = z$ a $x' = g(x)$. Platí $x' = g(x) = g(g_1^{-1}(z)) = g(g_1^{-1}(g_2(y)))$. Protože g, g_1^{-1}, g_2 jsou prvky G, je i jejich složení prvkem G, tedy $x' \in O_y$. Protože x' jsme zvolili libovolně, je $O_x \subseteq O_y$. Podobně ukážeme $O_y \subseteq O_x$. Tedy $O_x = O_y$.

Ještě si zadefinujeme dvě význačné podmnožiny X a G. Množinu bodů z X, které vybraná permutace g nechá na místě, nazveme množinou pevných bodů g, a značíme X_g. Podobně množinu permutací, které nechají na místě vybraný bod x nazveme množinou stabilizátorů x a označíme ji G_x. Formálně můžeme tyto množiny popsat následovně: $X_g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$, $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

Tvrzení. *Platí $|O_x| \cdot |G_x| = |G|$.*

Důkaz. Mějme $y \in O_x$. Vezmeme si $h \in G$ splňující $g(y) = x$ (protože $y \in O_x$, existuje $g \in G$ takové, že $g(x) = y$; h je tedy inverz ke g, takže takové g skutečně existuje).

Abychom tvrzení dokázali, stačí nám dokázat, že počet prvků G je stejný jako počet dvojic (y, f), kde $y \in O_x$ a $f \in G$. Tedy chceme najít bijekci mezi prvky grupy a těmito dvojicemi.

Každé dvojici takto přiřadíme pomocí zobrazení F prvek $F(y, f) = g \circ f$. Protože $g, f \in G$, je i $(g \circ f) \in G$. Teď zbývá dokázat, že právě zadefinované zobrazení je bijekce, tzn. prosté a na.

Vezmeme si $(y_1, f_1) \neq (y_2, f_2)$. Nejprve uvažujme, že $y_1 \neq y_2$. Odtud máme $F(y_1, f_1)(x) = (g \circ f_1)(x) = y_1$ a $F(y_2, f_2)(x) = (g \circ f_2)(x) = y_2$, tedy $F(y_1, f_1) \neq F(y_2, f_2)$. Dále si vezmeme $y_1 = y_2$, odkud máme $f_1 \neq f_2$. Tedy existuje nějaké $z \in G$ takové, že $f_1(z) \neq f_2(z)$. Z toho opět dostáváme $F(y_1, f_1) \neq F(y_2, f_2)$, takže F je prosté.

Teď chceme dokázat, že F je na. Hledáme $y \in O_x$ a $f \in G_x$ pro libovolné $l \in G$ tak, že $F(y, f) = l$. Vezmeme si $y = l(x)$ a $f = g^{-1} \circ l$ a ověřím, že to funguje: $F(y, f) = (g \circ f) = g \circ (g^{-1} \circ l) = h$.

Tvrzení. *Mějme $x, y \in X$ a $y \in O_x$. Pak $|G_x| = |G_y|$.*

Důkaz. Budeme opět postupovat tak, že najdeme nějakou bijekci $F : G_x \mapsto G_y$. Pak už zřejmě $|G_x| = |G_y|$. Opět si vezmeme $g \in G$ splňující $g(y) = x$, pro $h \in G$ položíme $F(h) = g \circ h \circ g^{-1}$. Tedy pro $h \in G_x$ je $F(h) \in G_y$. Jednoduše ověříme, že F je bijekce.

Věta. (Burnsideovo lemma) *Počet orbit je průměrný počet pevných bodů permutací z G, čili*

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Důkaz. Dokazovaný vzorec upravíme na $|\mathcal{O}| \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$. Dále si vezměme množinu všech dvojic (g, x), kde $g \in G$ a $x \in X_g$, a nazvěme ji A. Budeme postupovat počítáním dvěma způsoby.

Nejdříve budeme postupně brát všechny permutace a zjišťovat, s kolika $x \in X$ mohou vytvořit dvojici patřící do A. Dostaneme $|A| = \sum_{g \in G} |X_g|$.

Teď budeme naopak postupně brát všechny prvky množiny X a zjišťovat, s kolika $g \in G$ mohou vytvořit dvojici z A. Vezmeme si $O \in \mathcal{O}$ a $x_O \in O$. Za pomoci dříve dokázaných tvrzení máme $|A| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{O \in \mathcal{O}} |O_{x_O}| \cdot |G_{x_O}| = \sum_{O \in \mathcal{O}} |G| = |\mathcal{O}| \cdot |G|$. Teď už stačí pouze dát obě části dohromady a vyjde nám požadovaná rovnost.

Priklady

Příklad. Kolika různými způsoby, až na otočení, můžeme obarvit čtverec 3×3, když chceme, aby tři políčka byla modrá, tři červená a tři zelená?

Příklad. Kolika různými způsoby, až na otočení a převrácení, můžeme obarvit čtverec 3×3, když chceme, aby tři políčka byla modrá, tři červená a tři zelená?

Příklad. Kolika způsoby lze sestavit náhrdelník ze tří červených, tří zelených a tří modrých kuliček?

Příklad. Kolika způsoby lze přiřadit stěnám krychle čísla $1, \ldots, 6$?

Příklad. Kolik existuje hracích kostek (tj. kolika způsoby můžeme na krychli umístit 1–6 ok) takových, že součet ok na protilehlých stěnách je 7?

Příklad. Kolik existuje neizomorfních grafů na čtyřech vrcholech?

Příklad. Určete počet různých neizomorfních obarvení hran grafu $K_{3,3}$ pomocí n barev.

Zdroje

[1] Robert Šámal: příspěvek *Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati.*
[2] David Stanovský: *Základy algebry.*
[3] přednáška *Kombinatorika a grafy 2.*