Booleova algebra

Luboš Štěpánek

Úvod

Booleova algebra (čti „búlova“), nazvaná podle irského matematika a logika George Boolea (1815–1864), je užitečná v mnoha matematických disciplínách a má velmi široké uplatnění v technických aplikacích. Tvoří teoretický základ pro navrhování rozmanitých regulovacích a rozhodovacích systémů.

Pro nás je podstatné, že vytváří určitou zastřešující teorii pro algebru množin a algebru výroků a dobře se hodí i při řešení úloh z rekreační matematiky. Kdo umí Booleovu algebru, v množinách a výrocích se tedy neztratí. I přes svůj „odborně“ znějící název je Booleova algebra dost dobře přístupná a zajímavá i pro PraSátka, která se ze středoškolských lavic na matfyz teprve těší. ;-)

Zavedení pojmů

Pro lepší pochopení Booleovy algebry si osvěžíme některé všeobecné pojmy, které se často zapomínají. Na přednášce je jen tak zběžně „prolétneme“ a přiblížíme si je na konkrétních příkladech, proto se nelekejte jejich rozsahu a zdánlivé formálnosti, nicméně pomůže nám vidět je před sebou napsané. ;-)

Definice. (kartézský součin) Kartézským součinem *množin K a L nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in K$ a $y \in L$.* Kartézský součin *množin K, L označujeme $K \times L$.*

Definice. Zobrazením množiny K do množiny L *(stručně „K do L“) nazýváme každou podmnožinu T kartézského součinu $K \times L$, pro niž platí, že ke každému $x \in K$ existuje právě jedno $y \in L$ takové, že $[x, y] \in T$.*

Definice. (binární operace) *Zobrazení množiny K do množiny L, kde $K = L \times L$, nazveme* binární operace na množině L *a označíme „$z = x * y$ na L“ či „$z = x \circ y$ na L“. Binární operaci na L pak tvoří každá podmnožina U kartézského součinu $(L \times L) \times L$ taková, že ke každé uspořádané dvojici $[x, y] \in L \times L$ existuje právě jedno $z \in L$ tak, že $[[x, y], z] \in U$.*

Definice. (unární operace) *Zobrazení množiny K do množiny L, kde $K = L$, nazveme* unární operace na množině L *a označíme např. „$y = \overline{x}$ na L“ či „$y = x^*$ na L“. Unární operaci na L pak tvoří každá podmnožina V kartézského součinu $L \times L$ taková, že ke každému $x \in L$ existuje právě jedno $y \in L$ tak, že $[x, y] \in V$.*

Definice. *Prvky x, y, z náleží množině L. Operaci $u = x * y$ na L nazýváme:*

(a) komutativní, *právě když platí $x * y = y * x$.*

(b) asociativní, *právě když platí $(x * y) * z = x * (y * z)$.*

(c) distributivní *vzhledem k operaci $u = x \circ y$ na L, právě když platí $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ a zároveň $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$.*

Definice. (neutrální prvek) *Neutrálním prvkem vzhledem k operaci $u = x * y$ na L nazýváme prvek $e \in L$, pro nějž platí: Pro všechna $x \in L$ je $x * e = e * x = x$.*

Příklad 1. U binárních operací $u = x + 2y$ a $u = x^2 + y^2$ na $\mathbb{R}$ zpaměti určete, zda jsou komutativní, asociativní a zda u nich existuje neutrální prvek.

Příklad 2. Na množině $\mathbb{R}$ uvažujme notoricky známé binární operace $\max(x, y)$ a $\min(x, y)$. Zjistěte, zda jsou tyto operace komutativní, asociativní, zda je $\max(x, y)$ distributivní vzhledem k $\min(x, y)$ a naopak. Nakonec stanovte neutrální prvky pro jednotlivé operace.

Booleova algebra

Nyní už máme za sebou teoretický základ pro zavedení Booleovy algebry.

Definice. (Booleova algebra) *Množinu B a na ní definované operace budeme nazývat* Booleovou algebrou, *pokud bude splněno vše následující:*

(i) *Množina B není prázdná a je na ní definována rovnost prvků.*
(ii) *Na množině B jsou definovány dvě binární operace (říkejme jim „sčítání“ a „násobení“) a jedna unární operace (říkejme jí „doplněk“).*
(iii) *Obě binární operace jsou komutativní a asociativní.*
(iv) *Binární operace „sčítání“ je distributivní vzhledem k operaci „násobení“ a naopak operace „násobení“ je distributivní vzhledem k operaci „sčítání“.*
(v) *Ke každé z binárních operací existuje právě jeden neutrální prvek; přitom jsou oba tyto neutrální prvky navzájem různé (pro operaci „$*$“ označme neutrální prvek e^* a pro operaci „$\circ$“ ho označme e°).*
(vi) *Unární operace „doplněk“ $y = x'$ definovaná na B splňuje $x * x' = e^\circ$ a zároveň $x \circ x' = e^*$.*

Definice. (Booleova algebra alternativně) *Pokud budeme označovat prvky Booleovy algebry malými písmeny $a, b, c, ..., x, y, z$, rovnost prvků rovnítkem „$=$“, binární operaci „sčítání“ plusem „$+$“ a „násobení“ symbolem krát „$\cdot$“, unární operaci „doplněk“ budeme značit $y = x'$, dále když neutrální prvek při „sčítání“ označíme 0 a neutrální prvek při „násobení“ označíme 1, můžeme Booleovu algebru*

alternativně zadefinovat jako kompletně platnou skupinu výroků (1) – (10)*:*

$$x + y = y + x \tag{1}$$
$$x \cdot y = y \cdot x \tag{2}$$
$$(x + y) + z = x + (y + z) \tag{3}$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{4}$$
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \tag{5}$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \tag{6}$$
$$x + 0 = x \tag{7}$$
$$x \cdot 1 = x \tag{8}$$
$$x + x' = 1 \tag{9}$$
$$x \cdot x' = 0 \tag{10}$$

Takto zavedenou Booleovu algebru *budeme značit* $(B, +, \cdot, ')$.[10]

Na přednášce si ukážeme, jak dokázat platnost následujících vět vyplývajících z vlastností obecné Booleovy algebry. Všechno asi nestihneme, proto přednáška vlastně jen naznačí charakter použitelných důkazů.

Věta. *Pro každý prvek $x \in B$ Booleovy algebry platí:*

$$x + x = x \tag{11}$$
$$x \cdot x = x \tag{12}$$
$$x \cdot 0 = 0 \tag{13}$$
$$x + 1 = 1 \tag{14}$$
$$(x')' = x \tag{15}$$

Věta. *Pro všechny prvky $x, y \in B$ Booleovy algebry platí:*

$$(x + y)' = x' \cdot y' \tag{16}$$
$$(x \cdot y)' = x' + y' \tag{17}$$
$$x + xy = x \tag{18}$$
$$x \cdot (x + y) = x \tag{19}$$
$$x + x' \cdot y = x + y \tag{20}$$
$$x \cdot (x' + y) = xy \tag{21}$$

[10] Bystrý čtenář si možná všiml, že druhá definice Booleovy algebry je poněkud slabší, nevyžaduje totiž jednoznačnost neutrálních prvků pro každou operaci. Na přednášce si ukážeme, že jednoznačnost neutrálních prvků pro konkrétní binární operaci lze dokázat z axiómů (1), (2), (7) a (8).

Věta. *Nechť x, y jsou libovolné prvky množiny B. Pak platí:*

$$x + y = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 \tag{22}$$
$$x \cdot y = 1 \iff x = 1 \wedge y = 1 \tag{23}$$
$$x = y \iff xy' + x'y = 0 \tag{24}$$
$$x = y \iff (x + y') \cdot (x' + y) = 1 \tag{25}$$

Arsenál vztahů (1) – (25) se hodí při řešení např. následujícího příkladu.

Příklad. Zjednodušte následující zápisy výrazů Booleovy algebry tak, aby obsahovaly co nejméně symbolů:

(a) $abc + [b' \cdot (a' + c)]'$,

(b) $(ab + de)' \cdot (d + e) \cdot ca \cdot (c' + b')$.

Modely Booleovy algebry

Definice. (Model Booleovy algebry) Modelem Booleovy algebry *nazveme každou neprázdnou množinu a na ní definované dvě binární a jednu unární operaci, pokud pro prvky této množiny platí všechny axiómy* (1) – (10).

Předchozí definice zároveň i naznačuje, co musí být splněno, abychom mohli nějakou množinu s jejími operacemi považovat za model Booleovy algebry.

Tvrzení. Zvolme za B množinu $\hat{M}$ všech podmnožin neprázdné množiny M, operaci sčítání, násobení a doplněk na B konkretizujme postupně jako sjednocení, průnik a doplněk na $\hat{M}$. Pak pro všechny prvky množiny $\hat{M}$ platí axiómy (1) – (10). Říkáme, že množinová algebra $(\hat{M}, \cup, \cap, ')$ je modelem Booleovy algebry $(B, +, \cdot, ')$.

Tvrzení. Zvolme za B množinu $H = \{0, 1\}$ pravdivostních hodnot výroků, operaci sčítání, násobení a doplněk na B konkretizujme postupně jako disjunkci, konjunkci a negaci na H. Pak pro všechny prvky množiny H platí axiómy (1) – (10). Říkáme, že algebra pravdivostních hodnot $(H, \vee, \wedge, \neg)$ je modelem Booleovy algebry $(B, +, \cdot, ')$.

Na základě předchozích dvou tvrzení můžeme řešit následující příklad pomocí pravidel a vět (1) – (25). U některých dalších příkladů si na přednášce aspoň trochu naznačíme i aplikaci jejich výsledků například v technické sféře.

Příklad 1. Rozhodněte, zda při standardním značení platí:

(a) $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cap B'$,

(b) $[(\neg X \vee Y) \wedge \neg X] \vee (\neg Y \vee X) \iff (X \vee \neg X)$.

Příklad 2. Buď množina $C = \{1, 2, 3, 6\}$. Definujme na C binární operace „tvoření nejmenšího společného násobku“, „tvoření největšího společného dělitele“ a unární operaci „$u = 6/x$“. Dokažte, že C s takto definovanými operacemi je modelem Booleovy algebry.

Příklad 3. V Booleově algebře $(D, +, \cdot, ')$, kde $D = \{0, 1\}$ je množina obou neutrálních prvků, řešte rovnici o jedné neznámé x:

$$((x' + 1)' + (x + 0))' = 0.$$

Příklad 4. V Booleově algebře $(D \times D, +, \cdot, ')$, kde $D = \{0, 1\}$ je množina obou neutrálních prvků, řešte soustavu rovnic o neznámých x, y:

(a)

$$\begin{aligned} (x + y') \cdot (x' + y) &= x \\ x + y &= x, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} ax + by' &= 1 \\ ay + bx' &= 1, \end{aligned}$$

kde a a b jsou parametry z D.

Příklad 5. Řešte rovnici

$$X \cap \{4, 6, 8\} = (X' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X$$

o jedné proměnné X v množině $\hat{K}$ všech podmnožin množiny $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Příklad 6. Pokuste se ukázat, že systém axiómů Booleovy algebry je závislý, tj. některé z axiomů (1) – (10) lze nahradit kombinací jiných axiómů z oné desetice. (Nápověda: Odvoďte axióm (3) z axiómů (1), (2), (5) – (10).)

Definice. (booleovská funkce) Booleovskou funkcí o n proměnných *($n \in \mathbb{N}$) na dvouprvkové množině $D = \{0, 1\}$ obou neutrálních prvků nazveme zobrazení množiny $\underbrace{D \times D \times D \times ... \times D}_{n}$ do množiny D.*

Věta. *Pro každou booleovskou funkci f o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z množiny $D = \{0, 1\}$ platí:*

$$\begin{aligned} f : u \;=\; & f(1, 1, \ldots, 1, 1) \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad + \\ + \; & f(1, 1, \ldots, 1, 0) \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n' \quad + \\ & \qquad\qquad \vdots \\ + \; & f(0, 0, \ldots, 0, 1) \cdot x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n \quad + \\ + \; & f(0, 0, \ldots, 0, 0) \cdot x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n'. \end{aligned}$$

Příklad 7. Booleovská funkce k o třech proměnných x, y, z z množiny $D = \{0, 1\}$ je určena následující tabulkou. Určete funkci k rovnicí.

x	y	z	$k(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Literatura

Mnohem víc příkladů, hezky vysvětlená řešení a dokonce i technické aplikace, na které v tomto příspěvku nezbyl prostor, najdete v

[1] Oldřich Odvárko: *Booleova algebra*, edice Škola mladých matematiků, Praha, 1973.