Bezčtvercová slova

Jiří Koula

O co jde

Představte si, že máte k dispozici písmena a, b, c a tvoříte z nich posloupnosti, budeme jim říkat slova (tedy slovo pro nás bude libovolná posloupnost, nestaráme se o význam). Pokud se nám ve slově vyskytnou dva stejné řetězce bezprostředně za sebou (např. ve slově *abccbacbab* to je řetězec *cba*), řekneme, že slovo obsahuje čtverec. Naším cílem bude ukázat, že je možné z písmen a, b, c vytvořit libovolně dlouhé bezčtvercové slovo (tedy slovo, které neobsahuje čtverec) – schválně, zkuste si najít nějaké takové slovo délky alespoň sto – dokonce sestrojíme slovo nekonečné délky s touto vlastností. K důkazu použijeme oblíbenou fintu – problém převedeme na nějaký jiný problém, který už někdo vyřešil `:-)`.

Něco definic

Definice. *Abecedou A nazveme neprázdnou konečnou množinu, její prvky budeme nazývat písmena. Slovem nad abecedou A rozumíme konečnou posloupnost písmen z A. Prázdné slovo (posloupnost délky 0) značíme ε. Množinu slov nad abecedou A budeme značit A^*, A^+ označíme množinu $A\backslash\{\varepsilon\}$.*

Definice. *Spojení slov u a v budeme značit uv (uv tedy vznikne tak, že „na konec u přilepíme v“). Morfismem mezi A^* a B^* nazveme zobrazení $f : A^* \to B^*$ takové, že $f(\varepsilon) = \varepsilon$ a $f(uv) = f(u)f(v)$ pro všechna $u, v \in A^*$. Slovo u nazveme podslovem slova v, pokud existují slova x a y taková, že $v = xuy$. Slovo u se nazývá levé podslovo, pokud $x = \varepsilon$. Je-li u slovo, pak $|u|$ značí jeho délku a u^R je slovo u zapsáno v opačném pořadí. Palindrom je takové slovo, pro něž $u = u^R$.*

Definice. *Čtverec je slovo tvaru uu pro nějaké $u \neq \varepsilon$. Slovo obsahuje čtverec, pokud nějaké jeho podslovo je čtverec, v opačném případě je nazveme bezčtvercové.*

Definice. *Nechť A je abeceda, $u, v \in A^+$ a u se vyskytuje ve v alespoň dvakrát. Potom existují $x, y, x', y' \in A^*$ taková, že $|x| < |x'|$, $|y| > |y'|$ a $v = xuy = x'uy'$. Výskyty u ve v se nazývají*
1) disjunktní, pokud $|x'| > |xu|$, tedy $v = xuzuy'$ pro nějaké $z \in A^+$.
2) přilehlé, pokud $|x'| = |xu|$, tedy $v = xuuy'$.
3) překrývající se, pokud $|x'| < |xu|$.

K čemu jsou definice

Nyní už máme (téměř) dostatek prostředků, abychom mohli pomalu směřovat k cíli.

Definice. *Překrývající se podslovo je podslovo tvaru $avava$, kde $a \in A$, $v \in A^*$.*

Lemma. *Slovo $w \in A^*$ obsahuje dva překrývající se výskyty nějakého neprázdného slova právě tehdy, když obsahuje překrývající se podslovo.*

Definice. *Nekonečným slovem nad abecedou A myslíme nekonečnou posloupnost písmen z A, tedy zobrazení $a : \mathbb{N} \to A$, píšeme $a = a_0a_1a_2\ldots$, kde $a_i = a(i)$ pro $i \in \mathbb{N}$ (nulu v této přednášce počítáme mezi přirozená čísla). Definujme $a^{[k]} = a_0a_1\ldots a_{k-1}$ a nazvěme toto slovo levým podslovem a délky k. Je-li $u = a^{[k]}$, potom $a = ub$, kde $b_i = a_{i+|u|}$, $i \in \mathbb{N}$. Slovo u nazveme podslovem a, pokud $a = xub$ pro nějaká x a b.*

Nekonečná slova jsou užitečná pro popis vlastností, které jsou stabilní vzhledem k podslovům – to jest pokud nějaké slovo má danou vlastnost, pak ji mají i všechna jeho podslova. Řekneme, že nekonečné slovo má vlastnost P, pokud ji mají všechna jeho podslova. „Bezčtvercovost“ je pochopitelně příkladem takové vlastnosti. To objasňuje význam spojení „nekonečné bezčtvercové slovo“. Nechť L_P značí množinu všech slov s vlastností P. Je-li P stabilní vzhledem k podslovům a $w \in L_P$, potom i všechna podslova w jsou v L_P.

Lemma. *Nechť P je vlastnost slov nad A stabilní vzhledem k podslovům. Potom L_P je nekonečná právě tehdy, když existuje nekonečné slovo nad A s vlastností P.*

Definice. *Mějme posloupnost $w_0, w_1, \ldots$ slov nad A takovou, že w_n je levým podslovem w_{n+1} pro $n \in \mathbb{N}$. Označme a nekonečné slovo splňující $a^{[k]} = w_n$ pro $k = |w_n|$, $n \in \mathbb{N}$. Píšeme $a = \lim w_n$ a a nazýváme limitou posloupnosti $(w_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Uvažujme následující speciální případ. Nechť $\alpha : A^* \to A^*$ je morfismus takový, že $\alpha(a) \neq \varepsilon$ pro $a \in A$ a $\exists a_0 \in A$ takové, že $\alpha(a_0) = a_0u$ pro nějaké $u \in A^+$ (říkáme, že α splňuje ($\heartsuit$) pro a_0). Potom pro každé n přirozené je

$$\alpha^{n+1}(a_0) = \alpha^n(\alpha(a_0)) = \alpha^n(a_0u) = \alpha^n(a_0)\alpha^n(u),$$

tedy $\alpha^n(a_0)$ je levé podslovo $\alpha^{n+1}(a_0)$. Limita této posloupnosti se značí $\alpha^\infty(a_0)$.

Je možné α přirozeně rozšířit na nekonečná slova nad A, stačí pro $b = b_0b_1\ldots$ definovat $\alpha(b) = \alpha(b_0)\alpha(b_1)\ldots$, toto slovo je nekonečné díky první podmínce ($\heartsuit$).

Lemma. *Nechť α splňuje ($\heartsuit$) pro a_0 a $a = \alpha^\infty(a_0)$. Potom $\alpha(a) = a$.*

Thue-Morseova slova

Nyní si ukážeme, přes co se dostaneme ke kýženému nekonečnému bezčtvercovému slovu – tímto prostředkem budou Thue-Morseova slova, což jsou slova, která neobsahují překrývající se podslovo. Domluvme se, že od tohoto místa dále bude vždy $A = \{a, b\}$. Pro slovo $w \in A^*$ označme $\overline{w}$ slovo, které vznikne z w tak, že všechna a nahradíme b a naopak. Nechť $\mu : A^* \to A^*$ je morfismus definovaný $\mu(a) = ab$ a $\mu(b) = ba$. Jistě μ splňuje ($\heartsuit$) pro a a b. Označme

$$t = \mu^\infty(a) = abbabaabbaababbabaababbaabbabaab\ldots,$$
$$\overline{t} = \mu^\infty(b) = baababbaabbabaababbabaabbaababba\ldots.$$

Lemma. *Nechť* $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = u_n v_n$, $v_{n+1} = v_n u_n$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *Potom pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí*
1) $u_n = \mu^n(a)$, $v_n = \mu^n(b)$,
2) $v_n = \overline{u_n}$, $u_n = \overline{v_n}$,
3) u_{2n}, v_{2n} *jsou palindromy,* $u^R_{2n+1} = v_{2n+1}$.

Lemma. (1) *Je-li* $X = \{ab, ba\}$, $x \in X^*$, *potom* $axa \notin X^*$, $bxb \notin X^*$.

Lemma. (2) *Pokud* $w \in A^+$ *neobsahuje překrývající se podslovo, potom je neobsahuje ani* $\mu(w)$.

Věta. *Nekonečné slovo* t *neobsahuje překrývající se podslovo.*

Bezčtvercová slova

Nyní už konečně můžeme vyslovit a dokázat to, o co nám od začátku jde.

Věta. *Nechť* $B = \{a, b, c\}$ *a* $\delta : B^* \to A^*$ *je definováno* $\delta(a) = abb$, $\delta(b) = ab$, $\delta(c) = a$. *Dále mějme nekonečné slovo* $\mathbf{a}$ *nad* A *začínající písmenem* a *takové, že neobsahuje překrývající se podslovo. Je-li* $\mathbf{b}$ *nekonečné slovo nad* B *takové, že* $\delta(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$, *potom* $\mathbf{b}$ *je bezčtvercové.*

Literatura

Tato přednáška byla připravena podle článku, který je (v angličtině) k nalezení na

`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/math/sb/sb.htm`.

Jeho autorem je *David Stanovský*, kterému bych chtěl poděkovat též za pomoc s českou terminologií.