Bertrandův postulát

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. Příspěvek nastiňuje elementární důkaz Bertrandova postulátu. Tento důkaz podal Paul Erdős v roce 1932. V olympiádní matematice se Bertrandův postulát používá spíše málo, ale může se vám hodit.

Úmluva. Všechny proměnné v dalším textu jsou z oboru celých čísel, nebude-li řečeno jinak.

Tvrzení. (Bertrandův postulát) *Pro každé přirozené $n > 1$ existuje prvočíslo p takové, že $n < p < 2n$.*

Uveďme si prostředky, které budeme při důkazu používat.

Definice. Dolní celou částí reálného čísla x nazveme největší celé číslo n, pro nějž platí $n \leq x$. Značíme ho $\lfloor x \rfloor$.

Tvrzení. *Pro každé x reálné platí $2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor \leq 2\lfloor x \rfloor + 1$.*

Tvrzení. *Nechť n je přirozené číslo a p prvočíslo. Potom největší exponent s takový, že $p^s \mid n!$, je roven $s = \sum\limits_{j \geq 1} \left\lfloor \frac{n!}{p^j} \right\rfloor$.*

Definice. Funkci, která přirozenému číslu přiřadí součin $1 \cdot 2 \cdots n$, nazveme *faktoriál.* Značíme $n!$. Kombinačním číslem $\binom{n}{k}$ budeme rozumět podíl $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tvrzení. *Nechť n je přirozené číslo, p prvočíslo a s je největší exponent takový, že $p^s \mid \binom{2n}{n}$. Potom:*

(i) *$p^s \leq 2n$.*
(ii) *Pokud $\sqrt{2n} < p$, potom $s \leq 1$.*
(iii) *Pokud $2n/3 < p \leq n$, pak $s = 0$.*

Tvrzení. *Mějme přirozené $n \geq 2$. Potom součin prvočísel menších nebo rovných n je menší než 4^n, tedy*

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prvočíslo}}} p < 4^n.$$

Úmluva. Nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b budeme značit $[a, b]$.

Příklad 1. Dokažte, že $n!$ není druhou mocninou přirozeného čísla pro $n > 1$.

Příklad 2. Dokažte, že každé přirozené číslo se dá napsat jako součet navzájem různých prvočísel nebo 1.

Příklad 3. Nechť P_n značí n-té prvočíslo. Předpokládejme, že pro n platí

$$P_n \leq P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} - 1.$$

Dokažte, že

$$P_{n+1} \leq P_1 + P_2 + \cdots + P_n + 1.$$

(Japonsko)

Příklad 4. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která se počet kladných dělitelů čísla $[1, 2, \ldots, n]$ rovná 2^k pro nějaké přirozené k. (Estonsko TST 2004)

Příklad 5. Která přirozená n jsou dělitelná všemi prvočísly menšími nebo rovnými $\sqrt{n}$?

Příklad 6. Nalezněte všechny dvojice a, b přirozených čísel takové, že číslo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a+b}$$

je rovněž přirozené. (MKS 30–2–7)

Příklad 7. Mějme přirozené číslo n. Najděte nejmenší číslo k takové, že

$$1^2, 2^2, \ldots, n^2$$

jsou navzájem nekongruentní modulo k. (AMM 1985)

Literatura a zdroje

Celý tento text je převzat ze staršího příspěvku *Bertrandův postulát* Jiřího „Dina“ Kouly, proto děkuji autorovi. Úlohy můžete nalézt na *http://www.mathlinks.ro*.