Bayesova věta a lékařská diagnostika

Páťa Rexová

Bayesovské metody jsou ve statistice hojně používané. Ve stručnosti lze bayesovský přístup charakterizovat tak, že při odhadování nějaké pravděpodobnosti či při testování hypotéz vezmeme v potaz nejen data získaná právě provedeným pozorováním, ale i tzv. *informace apriorní*, tj. informace známe již před pokusem (ať už jde o informace získané nějakým dřívějším pozorováním, či o pouhou domněnku, odhad).

Příklad. Označme C jev, že náhodně vybraná osoba má rakovinu. Z označme jev doplňkový, tj. to, že tato osoba rakovinu nemá. Předpokládejme, že lékaři mají k dispozici test se senzitivitou a specificitou 95%, to jest takový test, že má-li daná osoba rakovinu, test dá s pravděpodobností 95% kladný výsledek (označme $+$), a nemá-li rakovinu, test dá s pravděpodobností 95% záporný výsledek (označme $-$). Matematicky zapsáno platí:

$$P(+|C) = 0,95;\ P(-|C) = 0,05,\ P(+|Z) = 0,05;\ P(-|Z) = 0,95.$$

Přitom nechť je známo, že ve sledované populaci má rakovinu $0,5\%$ lidí (toto jest ona apriorní informace). Jestliže u náhodně vybrané osoby dal test pozitivní výsledek, jaká je pravděpodobnost, že tato osoba rakovinu skutečně má?

Na to, abychom se mohli více rozhovořit o teorii k tomuto příkladu, budeme potřebovat položit základy z diskrétní teorie pravděpodobnosti. Na chvíli proto odbočíme. Následující definice se můžou na první pohled zdát komplikované, na přednášce si je však velmi rychle objasníme na konkrétních příkladech.

Základy z diskrétní pravděpodobnosti

Definice. *Náhodným jevem A chápeme tvrzení o výsledku pokusu. Říkáme pak, že jev nastal, je-li toto tvrzení pravdivé. $A^{\complement}$ označujeme jev doplňkový (to, že jev A nenastal), $A \cup B$ označujeme sjednocení dvou jevů (to, že nastal alespoň jeden z nich), $A \cap B$ označujeme průnik jevů (to, že nastaly oba jevy zároveň).*

Uvědomme si nyní, co vlastně chápeme pod pojmem pravděpodobnost.

Definice. (Klasická definice pravděpodobnosti) *Nechť elementární jevy jsou všechny stejně pravděpodobné. Pak pravděpodobnost jevu A je podíl počtu příznivých jevů ku počtu všech elementárních jevů.*

Tato definice se ukázala být ne příliš vhodnou (ukážeme si, proč), pravděpodobnostníci se brzy přiklonili k tzv. *Kolmogorově definici pravděpodobnosti*:

Definice. *Buď Ω množina elementárních jevů ω. Řekneme, že systém podmnožin $\mathcal{A}$ množiny Ω je σ-algebra, jestliže pro něj platí:*
(i) *$\mathcal{A}$ je neprázdná.*
(ii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{A}$.

Například pro Ω konečnou může být její σ-algebrou množina všech podmnožin (jak tomu v diskrétních příkladech častokrát bývá).

Definice. *Pravděpodobností zveme reálnou funkci $P(A) : A \in \mathcal{A} \to [0,1]$, pro kterou platí:*
(i) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.
(ii) *$P(A) \geq 0$ pro každé $A \in \mathcal{A}$.*
(iii) *Jsou-li $A_1, A_2, \dots$ disjunktní množiny z $\mathcal{A}$, pak $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.*

Definice. *Podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, pro B s $P(B) > 0$ definujeme jako $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.*

Definice. *Úplný systém jevů je systém jevů $B_1, B_2, \dots$ takový, že platí:*
(i) $\bigcup_i B_i = \Omega$.
(ii) *$B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.*

Věta. (O úplné pravděpodobnosti) *Nechť $B_1, \dots, B_n$ je úplný systém jevů. Nechť pro každé i platí $P(B_i) > 0$. Pak pro každý jev A platí $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$.*

Důkaz. $A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$. Jevy $A \cap B_i$ jsou disjunktní. Čili $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$.

A konečně se dostáváme k větě související s naším příkladem:

Věta. (Bayesova) *Nechť $B_1, \dots, B_n$ je úplný systém jevů. Nechť $P(B_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$. Nechť A je jev a nechť $P(A) > 0$. Pak platí $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$.*

Důkaz. $P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$.